HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tekijä — Författare — Author

Ville Marttila

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Kompaktien pintojen luokittelulause

Oppiaine — Läroämne — Subject

Matematiikka

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Tammikuu 2018	34 s.

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Pro Gradu tutkielman aiheena on käsitellä kompakteja pintoja. Työn lopputuloksena on näyttää, että jokainen kompakti pinta on homeomorfinen pallon, torusten, eli munkkirinkilöiden, yhtenäisen summan kanssa tai projektiivisten tasojen yhtenäisen summan kanssa. Lisäksi todistetaan, että toruksen ja projektiivisen tason yhtenäinen summa on homeomorfinen kolmen projektiivisen tason yhtenäisen summan kanssa.

Tämä lause tunnetaan nimellä Kompaktien pintojen luokittelulause ja se on esitetty ja todistettu kirjassa W.S. Massey, Algebraic Topology: An Introduction.

Työ on laadittu niin, että siinä oletetaan lukijan tuntevan kurssin Topologia II asiat. Alussa tulee luku, jossa kerrataan kurssilta Topologia II tutuksi tulleita asioita ja kerrotaan muutamia tarvittavia tuloksia.

Joukkojen yhtenäinen summa on operaatio, jolla kaksi pintaa liitetään toisiinsa leikkaamalla niistä samankokoiset kiekot pois ja liittämällä ne toisiinsa leikkauskohtien reunoista. Tarkemmin yhtenäinen summa määritellään tekijäavaruutena, jossa joukoista leikattujen kiekkojen reunojen pisteet samastetaan.

Joukkojen yhtenäiselle summalle annetaan "kanoninen muoto", jota käytetään kompaktien pintojen esitysmuotona. Tätä käytetään kyseisen lauseen todistuksessa.

Eräs keskeisiä asioita lauseen todistuksessa on kompaktien pintojen kolmiointi. Tällä tarkoitetaan sitä, että kompakti pinta jaetaan äärellisen moneen suljettuun osajoukkoon, joista jokainen on homeomorfinen reaalitasossa olevan, suorilla rajatun kolmion kanssa. Tätä tulosta ei todisteta työssä, mutta viittaus todistukseen annetaan.

Kompaktien pintojen luokittelulauseen todistus on jaettu viiteen vaiheeseen ja erilliseen tulokseen. Ensimmäisessä vaiheessa käsitellään kompaktien pintojen kolmiointia tarkemmin kuin mitä määritelmän yhteydessä on tullut vastaan. Ensiksi näytetään, että kompaktin pinnan kolmiointi voidaan muodostaa tason kiekon kanssa homeomorfisesta monikulmiosta samastamalla sen kylkiä.

Seuraavassa vaiheessa käsitellään pinnan monikulmion kanonisessa muodossa olevien kylkien eliminointia. Tietyntyyppiset kyljet voidaan eliminoida ja näin saadaan tuloksena yksinkertaisempi alkuperäisen joukon kanssa homeomorfinen joukko.

Kolmannessa vaiheessa käsitellään monikulmion kärkien samastamista ja monikulmion muokkausta niin, että kaikki monikulmion kärjet samastuvat lopulta yhdelle kärjelle.

Neljäs ja viides vaihe käsittelee monikulmion muokkausta niin, että tulokseksi muodostuu monikulmio, jonka kanoninen summa on sama kuin torusten yhtenäisellä summalla tai projektiivisten tasojen yhtenäisellä summalla.

Lopuksi todistetaan, että toruksen ja projektiivisen tason yhtenäinen summa on homeomorfinen kolmen projektiivisen tason yhtenäisen summan kanssa. Tämä todistus käsittelee aikaisempien muokkausten ulkopuolelle jäänyttä tilannetta.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords

Topologia, Monisto, Pinta, Kompakti pinta, Kolmiointi, Kompaktien pintojen luokittelu

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Pro Gradu
Kompaktien pintojen luokittelulause

Ville Marttila

11. tammikuuta 2018

Ohjaaja Erik Elfving

Sisältö

1 Johdanto

Pro Gradu työni aiheena on käsitellä kompakteja pintoja. Tuloksena on näyttää, että jokainen kompakti pinta on homeomorfinen pallon, torusten, eli munkkirinkilöiden, yhtenäisen summan kanssa tai projektiivisten tasojen yhtenäisen summan kanssa. Lisäksi todistetaan, että toruksen ja projektiivisen tason yhtenäinen summa on homeomorfinen kolmen projektiivisen tason yhtenäisen summan kanssa.
Kyseinen lause tunnetaan nimellä Kompaktien pintojen luokittelulause kirjassa W.S. Massey, A Basic Course in Algebraic Topology.
Työn alussa kerrataan topologian käsitteitä ja määritelmiä, jotka ovat tulleet tutuksi kurssilta Topologia II. Erityisesti kiinnitetään huomiota tekijäavaruuteen ja se on otettu omaksi luvukseen. Seuraavaksi määritellään pinta sekä annetaan esimerkkejä kompakteista pinnoista. Joukkojen yhtenäinen summa on työn kannalta keskeinen asia ja sen määritelmä ja sen kanoninen muoto käydään läpi.
Kompaktien pintojen kolmiointi on eräs todistuksessa käytetty tulos. Tätä tulosta ei todisteta, mutta viittaus todistukseen annetaan. Kompaktien pintojen kolmiointia käsitellään omassa luvussaan sekä Kompaktien pintojen luokittelulauseen todistuksen ensimmäisessä vaiheessa.
Kompaktien pintojen luokittelulauseen todistuksen seuraavat vaiheet käsittelevät tason säännöllisen monikulmion muokkausta siinä olevien kylkien ja kärkien tyypin mukaan. Todistuksen viimeisessä vaiheessa käsitellään aikaisempien muokkausten ulkopuolelle jäänyttä tilannetta. Tämän tilanteen todistamiseksi näytetään eräs tulos, joka on muotoiltu omaksi lauseekseen.

2 Määritelmiä ja käsitteitä

2.1 Merkintöjä

I suljettu yksikköväli $[0,1] \subset \mathbb{R}$
ϕ tyhjä joukko
$\overline{A}$ joukon A sulkeuma
$\eth(A)$ Joukon A reuna
S^n n-ulotteinen yksikköpallo $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \mid x \mid = 1\}$
S^1 yksikköympyrä
B^n n-ulotteinen yksikkökuula eli $\{x \in \mathbb{R}^n : \mid x \mid < 1\}$
D^2 suljettu yksikkökiekko eli $\overline{\mathrm{B}^2}$
$\overline{\mathrm{B}^n}$ suljettu n-ulotteinen yksikkökuula eli $\{x \in \mathbb{R}^n : \mid x \mid \leq 1\}$
T, T^1 torus
$P(X)$ Joukon X potenssijoukko eli kaikkien X:n osajoukkojen muodostama joukko.
A^C Joukon A komplementti. Eli jos A on avaruuden X osajoukko, niin $A^C = \{x \in X : x \notin A\}$
Yksiö on yhden alkion muodostama joukko, esim. $\{x\}$
Kaksio on kahden alkion muodostama joukko, esim. $\{x, y\}$

2.2 Joukon topologia

Olkoon X mikä tahansa joukko ja τ kokoelma X:n osajoukkoja. Kokoelma τ on joukon X *topologia* mikäli seuraavat ehdot ovat voimassa:

1. Kokoelma τ sisältää jäsentensä mielivaltaiset yhdisteet.

2. Kokoelma τ sisältää jäsentensä äärelliset leikaukset.

3. Joukko $X \in \tau$ ja tyhjä joukko $\phi \in \tau$.

Kokoelman τ jäseniä kutsutaan avoimiksi joukoiksi tai tarkemmin τ-avoimiksi joukoiksi. Järjestettyä paria (X, τ) kutsutaan topologiseksi avaruudeksi.

2.3 Ympäristö

Topologisen avaruuden (X, τ) pisteen x *ympäristö* on avoin joukko, joka sisältää pisteen x.
Topologisen avaruuden (X, τ) osajoukon A ympäristö on avoin joukko, joka sisältää joukon A.
Joukon A *reuna* on kaikkien niiden pisteiden muodostama joukko joiden jokainen ympäristö kohtaa sekä A:n ja A^c:n. Joukon A reunaa merkitään symbolilla $\eth(A)$.
Joukon A *sisäpisteet* on kaikkien niiden A:n pisteiden joukko joilla on ympäristö, joka sisältyy A:han. Joukon A sisäpisteiden joukkoa merkitään $int(A)$. Joukko $int(A)$ on aina avoin.

2.4 Suljettu joukko, sulkeuma ja kompakti joukko

Topologisen avaruuden (X, τ) osajoukko A on *suljettu*, jos sen komplementti A^C on avoin.
Avaruuden X osajoukon A *avoin peite* U on kokoelma avaruuden X avoimia osajoukkoja, joilla $A \subset \cup U$.
Joukon A avoimen peitteen U *osapeite* V on kokoelma U:n alkioita, joilla $A \subset \cup V$.
Avaruuden X osajoukon A sulkeuma, $\overline{A}$, on kaikkien niiden pisteiden muodostama joukko joiden jokainen ympäristö kohtaa joukon A. Joukon sulkeuma on aina suljettu.
Avaruuden X osajoukko A on *kompakti*, jos A:n jokaisella avoimella peitteellä on äärellinen osapeite.

2.5 Hausdorff-avaruus

Olkoon (X, τ) topologinen avaruus. Avaruus (X, τ) on *Hausdorff-avaruus* tai *Hausdorff* mikäli kaikilla X:n eri alkioilla x ja y on olemassa x:n ympäristö U ja y:n ympäristö V siten, että $U \cap V = \phi$. Joukon Hausdorff-ominaisuutta kutsutaan myös T_2 ominaisuudeksi.

2.6 Jatkuva, avoin ja suljettu kuvaus

Olkoot (X, τ_1) ja (Y, τ_2) topologisia avaruuksia. Sanotaan, että kuvaus $f : X \to Y$ on *jatkuva pisteessä* $a \in X$, jos jokaista $f(a)$:n ympäristöä V kohti on olemassa sellainen a:n ympäristö U, että $fU \subset V$ eli $U \subset f^{-1}V$. Jos f on jatkuva jokaisessa pisteessä $x \in X$, sanomme lyhyesti, että f on *jatkuva*.
Olkoot (X, τ_1) ja (Y, τ_2) topologisia avaruuksia. Kuvaus $f : X \to Y$ on *avoin kuvaus*, jos kaikilla X:n avoimilla osajoukoilla A avaruuden Y osajoukko fA on avoin.
Olkoot (X, τ_1) ja (Y, τ_2) topologisia avaruuksia. Kuvaus $f : X \to Y$ on *suljettu kuvaus*, jos kaikilla X:n suljetuilla osajoukoilla A avaruuden Y osajoukko fA on suljettu.
Seuraavaan tulokseen viitataan Kompaktien pintojen luokittelulauseen yhteydessä. Kyseinen tulos on kirjassa [2] nimellä *Lause 15.15.* sivulla 120.
Olkoon X kompakti, Y Hausdorff ja $f : X \to Y$ jatkuva. Tällöin f on suljettu kuvaus.
Tämä lause tulee todistetuksi luvussa Tekijätopologia ja tekijäavaruus saman kirjan lauseen 15.16 todistuksen yhteydessä.

2.7 Homeomorfismi

Olkoot (X, τ_1) ja (Y, τ_2) topologisia avaruuksia. Avaruudet X ja Y ovat *homeomorfiset*, mikäli on olemassa jatkuva kuvaus $f : X \to Y$ s.e. f on bijektio sekä sen käänteiskuvaus f^{-1} on jatkuva.
Mikäli joukot X ja Y ovat homeomorfiset keskenään, siitä käytetään merkintää $X \approx Y$.
Jos $X \approx Y$, sanomme, että X ja Y kuuluvat samaan *homeomorfismiluokkaan.* [1]

2.8 Upotus ja immersio

Kuvaus $f : X \to Y$ on *upotus*, jos sen määrittelemä kuvaus $f_1 : X \to f(X)$ on homeomorfismi.
Jatkuva injektio ei ole aina upotus. Seuraava esimerkki näyttää tämän. Olkoon $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, jolla

$f\mathbb{N} = \mathbb{Q}$. Koska $\mathbb{Q}$ on numeroituva, tällainen kuvaus on olemassa. Joukko $\mathbb{N}$ on diskreetti, joten f on jatkuva. Kuitenkin joukko $\mathbb{Q}$ ei ole diskreetti, joten f_1 ei ole homeomorfismi. [2]
Kuvaus $f : X \to Y$ on *immersio*, jos kaikilla $x \in X$ on ympäristö U, jolla $f \mid U$ on upotus. [2]
Avaruus X voidaan *upottaa* avaruuteen Y, mikäli on olemassa upotus $f : X \to Y$. Esimerkiksi reaaliluvut $\mathbb{R}$ voidaan upottaa reaalitasoon $\mathbb{R}^2$, mutta ei joukkoon $\mathbb{Q}^2$.

2.9 Yhtenäinen joukko

Topologisen avaruuden osajoukkoa D kutsutaan *yhtenäiseksi*, mikäli sillä ei ole olemassa jakoa kahdeksi osajoukoksi X ja Y siten, että

1. $D = X \cup Y$
2. $X \neq \phi \neq Y$
3. $\overline{X} \cap Y = \phi = X \cap \overline{Y}$

Jos tälläiset joukot X ja Y löytyvät joukkoa kutsutaan epäyhtenäiseksi. [2]

2.10 Kuvausten homotopia

Olkoon f ja g jatkuvia kuvauksia avaruudelta X avaruuteen Y.
Kuvaus f on *homotooppinen* kuvauksen g kanssa mikäli on olemassa jatkuva kuvaus $h : X \times I \to Y$ siten, että $h(x, 0) = f(x)$ ja $h(x, 1) = g(x)$ kaikilla $x \in X$.
Kuvausta h sanotaan *homotopiaksi*, joka yhdistää kuvaukset f ja g ja sitä merkitään $h : f \sim g$.
Jos halutaan mainita, että f on homotooppinen g :n kanssa, merkitään $f \sim g$.

2.11 Ryhmä ja monoidi

Olkoon G joukko ja $\cdot$ kuvaus, jota sanotaan laskutoimitukseksi, $G \times G \to G$. Pari $(G, \cdot)$ on *ryhmä* mikäli se toteuttaa seuraavat ehdot.

1. $x \cdot y \in G$ kaikilla $x, y \in G$ eli G on suljettu laskutoimituksen suhteen.
2. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ eli laskutoimitus on liitännäinen
3. Joukossa G on alkio e, jolla $e \cdot x = x \cdot e = x$. Alkiota e kutsutaan neutraalialkioksi.
4. Kaikilla alkioilla x on olemassa käänteisalkio x^{-1} siten, että $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$

Mikäli kaikilla ryhmän alkioilla x ja y on voimassa $x \cdot y = y \cdot x$ kutsutaan ryhmää vaihdannaiseksi ryhmäksi eli Abelin ryhmäksi.
Mikäli pari $(G, \cdot)$ toteuttaa ehdot 1. - 3. sitä kutsutaan monoidiksi. Jos monoidi toteuttaa ehdon $x \cdot y = y \cdot x$ kaikilla alkioillansa x ja y sitä kutsutaan vaihdannaiseksi monoidiksi.

2.12 Ositus ja ekvivalenssirelaatio

Olkoon X joukko ilman topologiaa. Kokoelma $D \subset P(X)$ on joukon X *ositus*, mikäli

1. $\phi \notin X$
2. Jokainen X:n alkio x kuuluu yhteen ja vain yhteen osituksen jäseneen.

Joukon X *relaatiolla* R tarkoitetaan sitä, että jokaista joukon X pisteparia $(x, y) \in X \times X$ kohti on määrätty onko x R-relaatiossa y:n kanssa vai ei. Mikäli x on relaatiossa y:n kanssa niin merkitään xRy tai $x \sim y$.
Joukon X relaatio R voidaan myös määritellä joukon $X \times X$ osajoukoksi, jolloin xRy merkitsee sitä, että $(x, y) \in R$.
Joukon X relaatiota R kutsutaan *ekvivalenssirelaatioksi* mikäli seuraavat ehdot ovat voimassa.

1. xRx
2. $xRy \Rightarrow yRx$
3. xRy ja $yRz \Rightarrow xRz$

Olkoon $ekv(X)$ joukon X kaikkien ekvivalenssirelaatioiden joukko ja $os(X)$ joukon X kaikkien ositusten joukko. Näiden välillä on bijektio $\mu : ekv(X) \to os(X)$. Kyseinen kuvaus määritellään seuraavasti:

1. Olkoon $R \in ekv(X)$ eli R on jokin X:n ekvivalenssirelaatio. Osituksen $D = \mu(R)$ muodostavat *ekvivalenssiluokat*: Jos $x \in X$, niin x määrää ekvivalenssiluokan $p(x) = \{y \in X : yRx\}$. Tarkemmin voidaan merkitä $p_R(x)$.
2. Olkoon $D \in os(X)$ eli D on jokin X:n ositus. Sitä vastaava ekvivalenssirelaatio $R = \mu^{-l}(D) \in ekv(X)$ määritellään $xRy \leftrightarrow x$ kuuluu samaan D:n jäseneen kuin y.

Esimerkki Kokoelmalle avaruuksia voidaan tehdä ositus, joissa avaruudet ovat keskenään homeomorfiset. [1] Näin avaruudet ovat jaettu keskenään erillisiin homeomorfismiluokkiin. Tämä jako muodostaa osituksen ja näin ekvivalenssirelaation.

Ositukselle $D = \mu(R)$ käytetään merkintää X/R ja sitä sanotaan X:n *tekijäjoukoksi* ekvivalenssirelaation R suhteen. Tämä tarkoittaa sitä, että X/R on joukko, jonka alkioina ovat X:n ekvivalenssiluokat ekvivalenssirelaatiossa R. Aiemmin käytettiin kuvausta $p : X \to X/R$, jota sanotaan ekvivalenssin R projektioksi. Se kuvaa alkion x siksi luokaksi, johon x kuuluu. Kuvaus p on aina surjektio.

3 Tekijäavaruus

3.1 Koindusointi

Olkoon (X, τ) topologinen avaruus ja Y joukko ilman topologiaa. Olkoon $f : X \to Y$ kuvaus. Kuvaus f määrittelee joukkoon Y topologian τ' seuraavalla tavalla: $\tau' = \{V \subset Y : f^{-1}(V) \in \tau\}$. Osoitamme, että kokoelma τ' muodostaa topologian.

Ehto T_1: Olkoon $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ perhe T':n jäseniä. Merkitään $V = \cup\{V_\alpha : \alpha \in A\}$. Koska yhdiste ja alkukuva kommutoivat, niin $f^{-1}V = \cup_{\alpha \in A} f^{-1}V_\alpha$. Tässä $f^{-1}V_\alpha \in \tau$, joten $f^{-1}V \in \tau$, koska τ toteuttaa ehdon T_1. Siis $V \in \tau'$
Ehto T_2: Olkoon A perhe τ':n jäseniä. Perheen A jäseniä kutsutaan nimellä A_m. Tässä m kuuluu johonkin äärelliseen indeksijoukkoon M. Perheen A jäsenen A_m alkukuva $f^{-1}(A_m)$ on topologian τ jäsen ja $f^{-1}(\cap_m A_m) = \cap_m f^{-1}(A_m)$, sillä alkukuva ja leikkaus kommutoivat. Koska topologia τ toteuttaa ehdon T_2, niin $\cap_m f^{-1}(A_m)$ kuuluu topologiaan τ. Näin myös τ' toteuttaa ehdon T_2.
Ehto T_3: Koska $f^{-1}(Y) = X \in \tau$ ja $f^{-1}(\phi) = \phi \in \tau$, ehto 3 on selvä.
Kokoelma τ' on siis joukon Y topologia. $\square$

Mikäli avaruuteen Y määritellään topologia edellämainitulla tavalla sanotaan, että kuvaus f *koindusoi* topologian joukkoon Y.

3.2 Samastuskuvaus

Olkoot X ja Y avaruuksia. Kuvaus $f : X \to Y$ on *samastuskuvaus*, jos

1. f on surjektio
2. f koindusoi avaruuteen Y sen alkuperäisen topologian, eli
   $V \subset Y$, V avoin avaruudessa $Y \Leftrightarrow f^{-1}(V) \subset X$, $f^{-1}(V)$ avoin avaruudessa X.

Seuraavat tulokset seuraavat heti määritelmästä:
Samastuskuvaus on aina jatkuva.
Injektio on samastuskuvaus, jos ja vain jos se on homeomorfismi.

3.3 Kuvauksen kanoninen hajotelma

Jokainen kuvaus $f : X \to Y$ voidaan kanonisella tavalla esittää yhdistettynä kuvauksena surjektiosta ja injektiosta.
Olkoon X ja Y joukkoja ja olkoon $f : X \to Y$ kuvaus. Määrittelemme joukkoon X relaation R_f asettamalla aR_fb, jos $f(a) = f(b)$. Tämä on selvästi ekvivalenssirelaatio, jonka ekvivalenssiluokat ovat $p(x) = f^{-1}\{f(x)\}$. Tekijäavaruuden X/R_f alkioina ovat kuvajoukon $f(X)$ pisteiden alkukuvat eli *säikeet*.
Olkoon $f' : (X/R_f) \to Y$ se kuvaus, joka kuvaa säikeen $f^{-1}y$ alkiolle y, ts. $f'(p(x)) = f(x)$. Tällöin saadaan kuvauksen f *kanoninen hajotelma* $f = f' \circ p$. Tässä p on surjektio ja f' injektio.

3.4 Tekijätopologia ja tekijäavaruus

Olkoon (X, τ) topologinen avaruus ja R jokin X:n ekvivalenssirelaatio. Projektion $p : X \to X/R$ koindusoimaa X/R:n topologiaa sanotaan *tekijätopologiaksi*.
Joukkoa X/R, jossa on määritelty tekijätopologia sanotaan X:n *tekijäavaruudeksi* R:n suhteen.
Projektio $p : X \to X/R$ on aina jatkuva.

Seuraavaksi todistetaan eräs lause, jota tarvitaan Kompaktien pintojen luokittelulauseen yhteydessä. Tarvittava lause on kirjasta [2] *Lause 8.9* sivulla 63.
Oletus: Olkoon $f : X \to Y$ jatkuva surjektio.
Väite: Jos f on avoin tai suljettu kuvaus, niin f on samastuskuvaus.
Todistus: Olkoon $V \subset Y$ ja $f^{-1}V \subset X$ sekä avoin avaruudessa X. Osoitamme, että V on avaruuden Y avoin osajoukko. Jos f on avoin, niin $ff^{-1}V \subset Y$ sekä avoin avaruudessa Y. Surjektiivisuuden nojalla on $V = ff^{-1}V$, joten $V \subset Y$ sekä avoin avaruudessa Y.
Koska $f^{-1}(V^c) = (f^{-1}V)^c$, niin $f^{-1}(V^c)$ on suljettu. Jos f on suljettu, niin
$V^c = ff^{-1}(V^c) \subset Y$ sekä suljettu avaruudessa Y, joten $V \subset Y$ sekä avoin avaruudessa Y. □

Seuraavaksi todistetaan eräs lause, jota tarvitaan seuraavan esimerkin yhteydessä. Tarvittava lause on kirjasta [2] *Lause 15.16* sivulla 120.
Oletus: Avaruus X on kompakti, avaruus Y Hausdorff avaruus ja $f : X \to Y$ jatkuva surjektio.
Väite: Tällöin $f : X \to Y$ on samastuskuvaus.
Todistus: Jos $A \subset X$ ja A on suljettu, niin A on kompaktin avaruuden suljettuna osajoukkona kompakti. Jatkuva kuvaus kuvaa kompaktin joukon kompaktiksi joukoksi, eli $f(A) \subset Y$ on kompakti. Koska avaruus Y on Hausdorff, niin sen kompaktit osajoukot ovat suljettuja. Nyt joukko $f(A)$ on suljettu. Näin f on suljettu kuvaus sekä edellä todistetun lauseen mukaan samastuskuvaus. □

Esimerkki 1. Seuraavaksi käydään läpi esimerkki tekijäavaruudesta.
Olkoon $f : I \to S^1$ kuvaus $f(x) = e^{2\pi ix} = (cos(2\pi x), sin(2\pi x))$.
Määritetään joukkoon I relaatio R_f asettamalla aR_fb, jos $f(a) = f(b)$. Nyt relaation R_f jäseniä ovat yksiöt $\{x\}$, $0 < x < 1$, ja lisäksi kaksio $\{0, 1\}$.

Toisinaan X/R voidaan todeta homeomorfiseksi jonkun tunnetun avaruuden Y kanssa, jos löydetään samastuskuvaus $f : X \to Y$, jossa $R_f = R$. Mikäli X ja Y ovat Hausdorff avaruuksia, sekä X on kompakti, riittää aikaisemmin mainitun tuloksen (Kirja [2] *Lause 15.16*) nojalla se, että f on jatkuva surjektio.
Kuvaus f on kompaktin avaruuden I jatkuva surjektio, eli se on samastuskuvaus, joten saadaan tulos $I/R_f \approx S^1$.

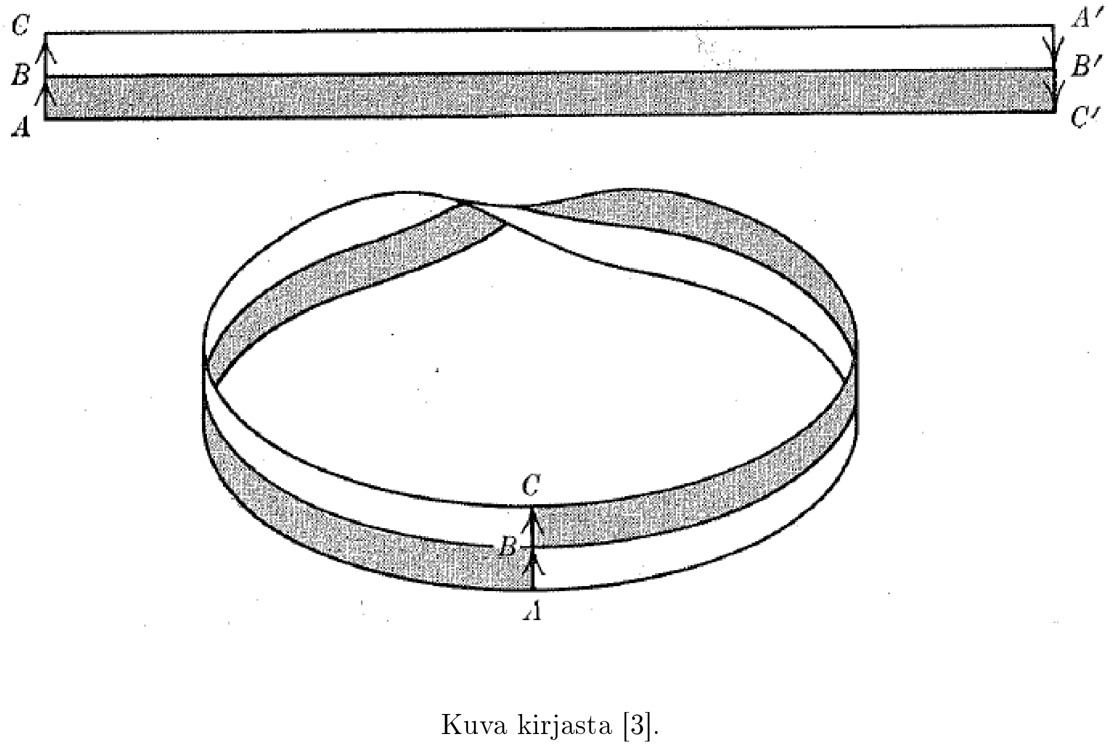
4 Pinta

4.1 n-monisto ja kompakti pinta

Topologinen avaruus (X, τ) on *lokaalisti Euklidinen* mikäli jokaisella pisteellä $x \in X$ on olemassa ympäristö, joka on homeomorfinen jonkin avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoimen kuulan kanssa.
Topologinen n-monisto on Hausdorff-avaruus, jonka jokaisella alkiolla x on ympäristö U, joka on homeomorfinen jonkin avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoimen kuulan B^n kanssa.
Eräissä kirjoissa topologisen n-moniston määritelmässä on lisäksi vielä maininta, että avaruuden tulee täyttää N_2-ominaisuus. (Esimerkiksi [4] ja [2]) Tämä tarkoittaa, että X:llä on numeroituva kanta. Kirjassa [3], jonka pohjalta Kompaktien pintojen luokittelulause käydään läpi, ei ole mainintaa N_2-ominaisuudesta moniston määritelmän yhteydessä, sillä yhtenäisen moniston ei tarvitse täyttää N_2 ehtoa. Lisäksi siinä rajoitutaan tutkimaan N_2 monistoja. [3] sivu 2.
Yhtenäistä topologista 2-monistoa kutsutaan tässä lyhyesti nimellä *pinta*. Yksinkertaisia esimerkkejä kompakteista pinnoista on pallo eli S^2 sekä torus.

4.2 Möbiuksen nauha

Olkoon X reaalitason $\mathbb{R}^2$ osajoukko, jossa $X = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Joukko X on toisinsanoen xy-tason neliö. *Möbiuksen nauha* saadaan kun pisteet $(0, y)$ ja $(1, 1-y)$ samastetaan.

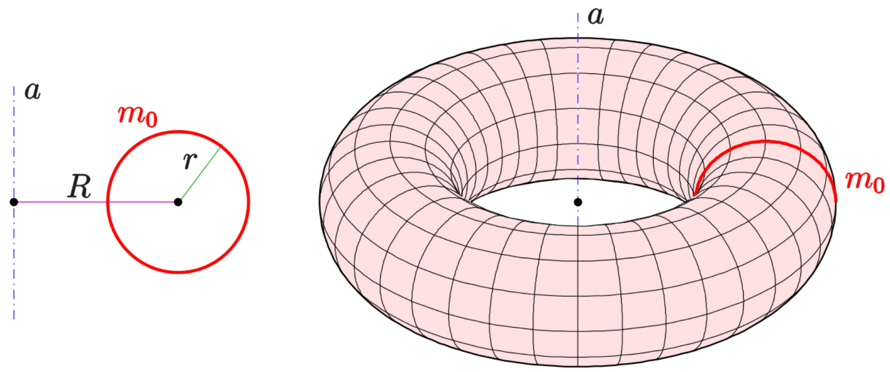


Kuva kirjasta [3].

Ylläolevassa kuvassa kuvassa on reaalitason suorakulmio $ACA'C'$, jossa $A < B < C$ ja $C' < B' < A'$. Möbiuksen nauha saadaan kun alkiot reunalta AC ja reunalta $C'A'$ samastetaan nuolten mukaisesti.

4.3 Torus eli munkkirinkilä

Torus on kahden yksikköympyrän S^1 karteesinen tulo $S^1 \times S^1$. Torusta merkitään symbolilla T, tai T^1 mikäli tekstissä esiintyy torusten karteesisia tuloja. Torus on euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^3$ osajoukko.



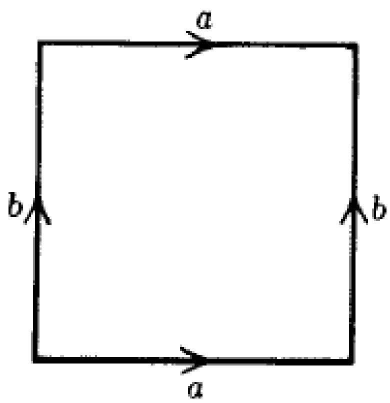
Kuva: Wikimedia Commons

Tarkemmin torus voidaan määritellä seuraavilla vaihtoehtoisilla tavoilla. [3]

1. Mikä tahansa topologinen avaruus, joka on homeomorfinen kahden yksikköympyrän karteesisen tulon $S^1 \times S^1$ kanssa.

2. Mikä tahansa topologinen avaruus, joka on homeomorfinen $\mathbb{R}^3$:n osajoukon A kanssa. Tässä $A = \{(x, y, z) : [(x^2 + y^2)^{1/2} - 2]^2 + z^2 = 1\}$. Tämä joukko saadaan kun xz-tason ympyrää $(x - 2)^2 + z^2 = 1$ kierretään z-akselin ympäri.

3. Olkoon X reaalitason $\mathbb{R}^2$ osajoukko, jossa $X = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Joukko X on toisinsanoen xy-tason neliö. Tällöin torus on mikä tahansa avaruus, joka on homeomorfinen X:n tekijäavaruuden kanssa. Tämä tekijäavaruus saadaan kun pisteet $(0, y)$ ja $(1, y)$ samastetaan kaikilla $0 \leq y \leq 1$ ja pisteet $(x, 0)$ ja $(x, 1)$ samastetaan kaikilla $0 \leq x \leq 1$.

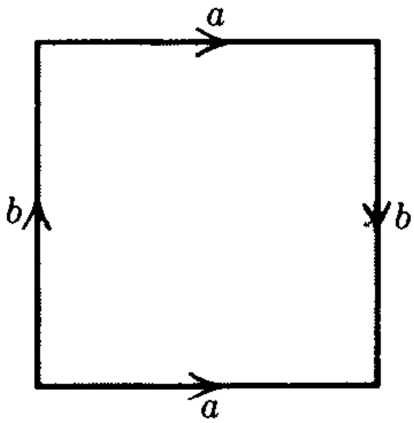


Periaatekuva toruksen konstruoinnista. Nuolet näyttävät samastuksien suunnat.
Kuva kirjasta [3].

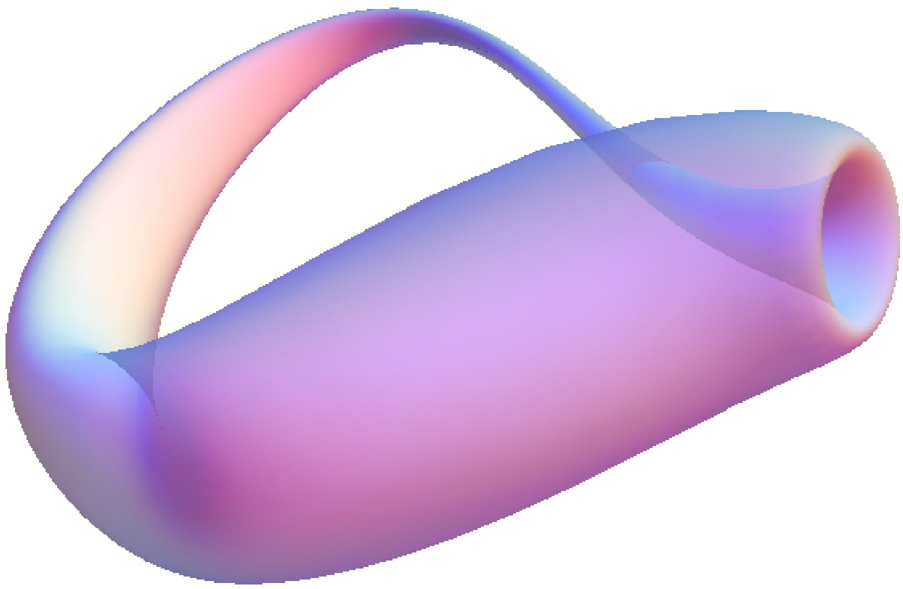
Kohdissa 1, 2 ja 3 mainitut avaruudet ovat keskenään homeomorfiset. [3]

4.4 Kleinin pullo

Olkoon X reaalitason $\mathbb{R}^2$ osajoukko, jossa $X = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Joukko X on toisinsanoen xy-tason neliö. *Kleinin pullo* on tekijäavaruus, joka saadaan kun pisteet $(x,0)$ ja $(x,1)$ samastetaan kaikilla $0 \leq x \leq 1$ ja pisteet $(0,y)$ ja $(0,1-y)$ samastetaan kaikilla $0 \leq y \leq 1$.



Periaatekuva Kleinin pullon konstruoinnista. Nuolet näyttävät samastuksien suunnat. Kuva kirjasta [3].



Kleinin pullon havainnekuva $\mathbb{R}^3$:ssa. Kuva: Wikimedia Commons.

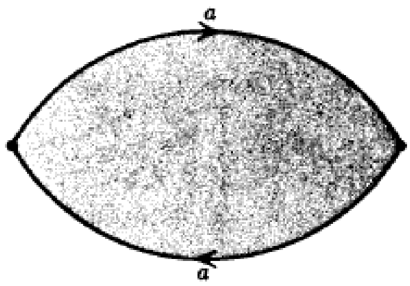
4.5 Projektiivinen taso

Projektiivinen avaruus on tekijäavaruus, joka voidaan määritellä muutamalla vaihtoehtoisella tavalla.

1. Määrittelemme 2-pallon S^2 ekvivalenssirelaation R valitsemalla ekvivalenssiluokiksi kaksiot $\{x, -x\}$, $x \in S^2$. Tekijäavaruus $P^2 = S^2/R$ on projektiivinen taso. [3]

2. Määrittelemme avaruuden $\mathbb{R}^2$ suljetun yksikkökiekon $\overline{B^2}$ relaation R valitsemalla ekvivalenssiluokiksi kaksiot $\{x, -x\}$, $x \in S^1$, ja yksiöt $\{a\}$, $a \in B^2$. Tekijäavaruus $P^2 = \overline{B^2}/R$ on projektiivinen taso.

3. Projektiivinen taso voidaan myös määritellä samaistamalla 2-kulmion vastakkaiset sivut kuvassa olevien nuolien mukaisesti. [3] Myös tässä vastinpisteet $\{x, -x\}$ samastetaan.



Kuva kirjasta [3].

Mikäli samastus tehtäisiin niin, että nuolet kulkisivat samaan suuntaan, saataisiin tulokseksi pallo. [3]

Projektiivista tasoa ei voida upottaa $\mathbb{R}^3$:een, mutta se voidaan upottaa $\mathbb{R}^4$:ään. [2]

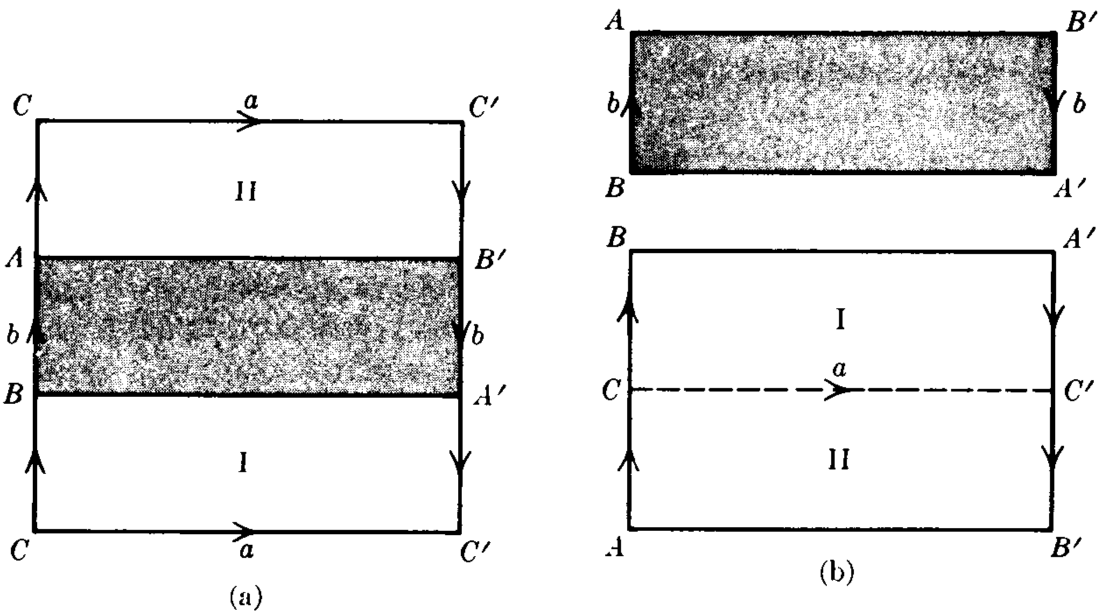
5 Joukkojen yhtenäinen summa

5.1 Määritelmä

Olkoon S_1 ja S_2 erillisiä kompakteja pintoja. Joukkojen S_1 ja S_2 *yhtenäinen summa*, jota merkitään $S_1 \# S_2$, muodostetaan valitsemalla suljetut kiekot $D_1 \subset S_1$ ja $D_2 \subset S_2$ (Joukot voivat olla myös muut kun suljettuja kiekkoja kunhan ne ovat homeomorfiset tason suljetun yksikkökiekon $\overline{B^2}$ kanssa.). Olkoon S_i' joukon D_i, jossa $i = \{1, 2\}$, sisäpisteiden muodostaman joukon komplementti joukossa S_i. Seuraavaksi valitaan homeomorfismi h, joka kuvaa joukon D_1 reunan joukon D_2 reunalle. Nyt $S_1 \# S_2$ on joukon $S_1' \cup S_2'$ tekijäavaruus, kun samastetaan pisteet x ja $h(x)$, jossa x on D_1 reunan piste. Joukko $S_1 \# S_2$ on selvästi pinta. Riippumatta joukkojen D_1 ja D_2 sekä homeomorfismin h valinnasta, saadaan topologian kannalta samankaltaiset joukot. Tämä tulos on helppo mieltää, mutta sen tarkka todistusta ei käydä läpi tässä työssä.
Havainnollisesti yhtenäinen summa muodostetaan leikkaamalla kaksi ympyrän muotoista reikää molempiin pintoihin ja yhdistämällä nämä pinnat liimaamalla leikattujen ympyröiden reunat toisiinsa kiinni. Topologian kannalta näin saatu pinta on samankaltainen riippumatta siitä miten pintoja käännetään toistensa suhteen kunhan niistä leikattujen ympyröiden reunat ovat vastakkain. Yhdistetty summa on kommutatiivinen eli $S_1 \# S_2 = S_2 \# S_1$. Lisäksi monistot $(S_1 \# S_2) \# S_3$ ja $S_1 \# (S_2 \# S_3)$ ovat homeomorfiset.

5.2 Esimerkkejä

Esimerkki 1. Jos joukkona S_2 on pallo S^2, niin $S_1 \# S_2$ on homeomorfinen joukon S_1 kanssa.
Esimerkki 2. Jos S_1 ja S_2 ovat toruksia niin niiden yhtenäinen summa on homeomorfinen avaruuden $\mathbb{R}^3$ seuraavanlaisen joukon kanssa. Kuution I^3 reuna, johon on porattu kaksi läpireikää samalle tahkolle. Reiät pitää porata niin, että reikien reunat eivät leikkaa. Myöskin reikien reunat tulee liittää tähän joukkoon.
Esimerkki 3.
Oletus: Olkoot S_1 ja S_2 projektiivisia tasoja.
Väite: Yhtenäinen summa $S_1 \# S_2$ on homeomorfinen Kleinin pullon kanssa.
Todistus: Tämä tulos näytetään "leikkaa ja liimaa"-keinolla. Olkoon S_i projektiivinen taso ja D_i suljettu kiekko, joka on S_i:n osajoukko. Silloin joukko S_i', joka on joukon D_i sisäpisteiden komplementti, on homeomorfinen sellaisen Möbiuksen nauhan kanssa, jossa on reuna mukana [3]. Projektiivisen tason voidaan ajatellaan olevan avaruuden $\mathbb{R}^2$ suljetun yksikkökiekon $\overline{B^2}$ tekijäavaruus, jossa vastinpisteet $\{x, -x\}$, $x \in S^1$, samastetaan. Mikäli joukoiksi D_i valitaan joukon $\{(x,y) \in \overline{B^2} :| y |\geq 1/2\}$ kuvajoukko samastuksessa, niin on tulos selvä.
Näin seuraa, että $S_1 \# S_2$ saadaan liimaamalla kaksi Möbius nauhaa toisiinsa sivuistansa. Seuraava kuva esittää miten leikkaamalla Kleinin pulloa sopivasti saadaan tulokseksi kaksi Möbiuksen nauhaa.



Kuva kirjasta [3].

Leikkaamalla viivaa AB' pitkin sekä viivaa BA' pitkin ja tekemällä samastukset saadaan leikkauksesta jäljelle ympyrä (Tämä leikkaus on kuvassa tummennettu alue.). □

5.3 Yhtenäinen summa muodostaa monoidin

Seuraavaksi mainitaan eräs tulos liittyen yhtenäisen summan homeomorfiaominaisuuteen. Todistusta ei anneta tarkasti, sillä se ei ole tärkeä todistettavan lauseen kannalta.
Oletus: Olkoon joukko X pintojen homeomorfismiluokat ja laskutoimituksena $\#$ yhtenäinen summa.
Väite: $(X, \#)$ muodostaa vaihdannaisen monoidin.
Todistuksen vaiheet: Käydään läpi monoidin määritelmässä olleet kohdat.

1. Kompaktien pintojen S_1 ja S_2 yhtenäinen summa $S_1 \# S_2$ on selvästi kompakti pinta. Joukko X on siis suljettu laskutoimituksen $\#$ suhteen.

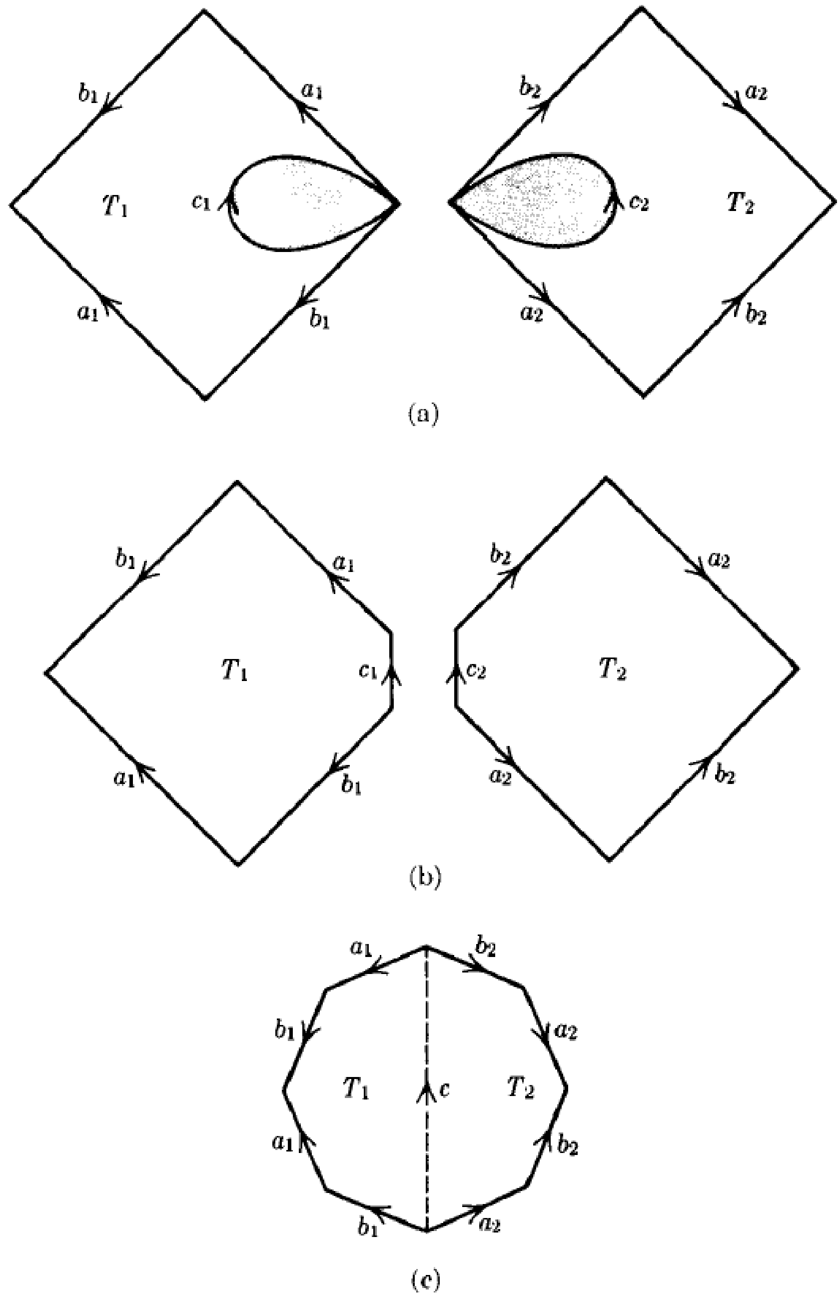
2. Yhtenäiset summat $(S_1 \# S_2) \# S_3$ ja $S_1 \# (S_2 \# S_3)$ ovat homeomorfiset kuten aikaisemmin todettiin. Näin yhdistetty summa on liitännäinen.

3. Esimerkin 1. mukaan monoidin neutraalialkion muodostaa pallon S^2 kanssa homeomorfiset joukot.

Pari $(X, \#)$ muodostaa näin monoidin. Aiemmin todettiin, että $S_1 \# S_2 = S_2 \# S_1$ eli yhtenäinen summa on kommutatiivinen. Näin monoidi $(X, \#)$ on vaihdannainen. $\square$
Kyseinen monoidi ei kuitenkaan ole ryhmä, sillä sen alkioilla ei ole käänteisalkioita. Huomaamme tämän siitä, että toruksella T ei ole käänteisalkiota T^{-1}, joiden yhtenäinen summa $T \# T^{-1}$ olisi pallon kanssa homeomorfinen.
Kahden suunnistuvan moniston yhtenäinen summa on suunnistuva sekä kahden suunnistumattoman moniston yhtenäinen summa on suunnistumaton. [3]

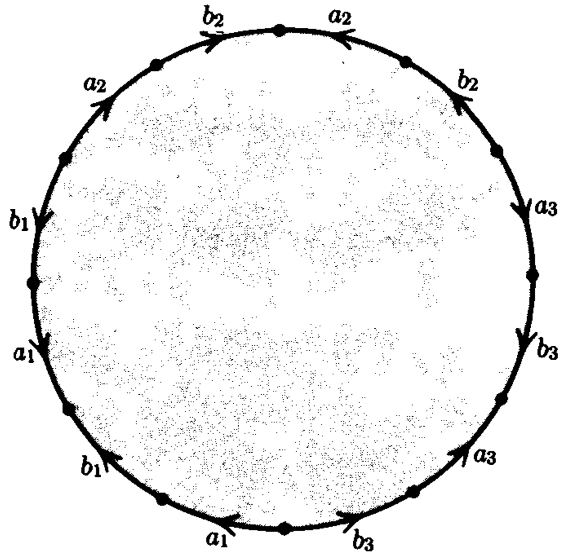
5.4 Yhtenäisen summan kanoninen muoto

Kompaktin pinnan *kanonisella muodolla* tarkoitetaan sitä, että kompakti pinta voidaan esittää säännöllisenä monikulmiona, jonka sivuja ja kärkiä samastetaan. Samantyyppisenä samastuksena voidaan ilmaista joukkojen yhtenäinen summa, jossa joukoista poistetun kiekon reunat samastetaan. Tätä käytetään tutkittavan tuloksen todistamisessa.
Torus muodostetaan neliöstä, jonka vastakkaiset sivut samastetaan. Hieman samankaltaisella tavalla voidaan kuvata kahden toruksen yhtenäinen summa.

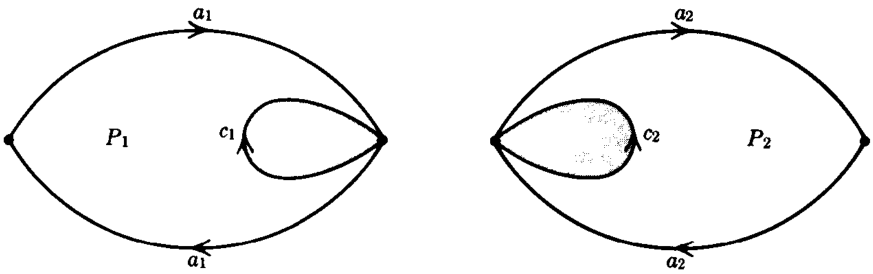


Olkoon T_1 ja T_2 toruksia. Kuvan ylimmässä kaaviossa nähdään miten torukset T_1 ja T_2 konstruoidaan neliöistä $a_1 \times b_1$ ja $a_2 \times b_2$ samastamalla vastakkaiset sivut nuolten mukaisesti. Samalla niistä leikataan ympyränmuotoiset joukot pois. Leikkauksen reunoja merkitään c_1 ja c_2. Toruksista leikatun kiekon komplementti, eli jäljelle jäänyt osa voidaan esittää viisikulmiona kuvan keskimmäisen kaavion mukaan. Seuraavaksi leikkauksen reunat c_1 ja c_2 samastetaan keskenään ja tulokseksi saadaan kahdeksankulmio kuten viimeisessä kaaviossa nähdään.

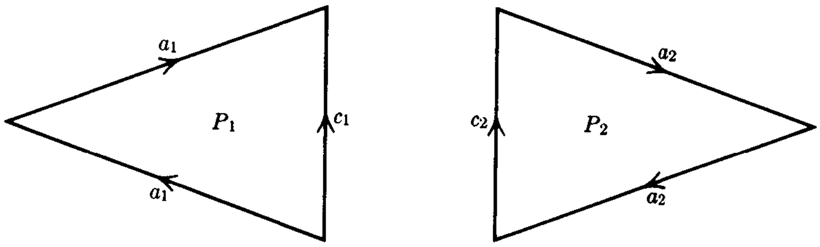
Tämän kahdeksankulmion kaikki kärjet samastetaan yhdeksi pisteeksi yhtenäisessä summassa $T_1 \# T_2$. Tämä on kahden toruksen yhtenäisen summan kanoninen muoto.
Seuraava kuva näyttää kolmen toruksen yhtenäisen summan. Aluksi käytetään kahden toruksen yhtenäisestä summasta tehtyä 8-kulmiota ja siihen lisätään neliöstä $a_3 \times b_3$ konstruoitu torus. Lisäys tehdään kahdeksankulmion sivujen a_1 ja b_2 väliin ja näin saadaan 12-kulmio.



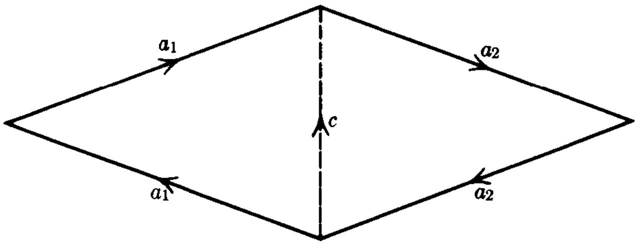
Nyt seuraa induktiolla, että n-toruksen yhtenäinen summa on homeomorfinen $4n$-kulmion tekijäavaruuden kanssa.
Kahden projektiivisen tason yhtenäisen summan kanoninen muoto muodostetaan vastaavalla tavalla kuin toruksen tapauksessa.



(a)

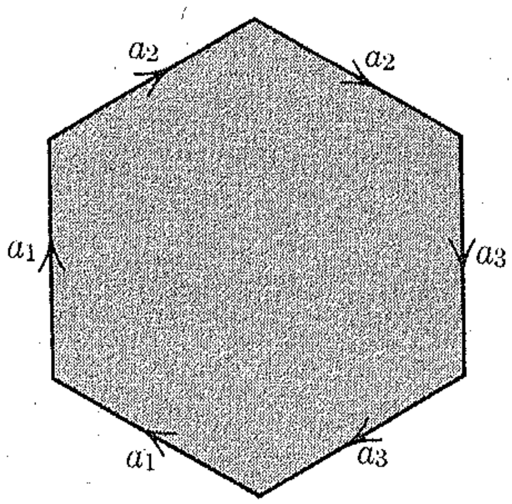


(b)



(c)

Kaksi projektiivista tasoa on muodostettu samastamalla 2-kulmion vastakkaiset sivut niin että vastinpisteet $\{x, -x\}$ samastuvat. Leikkaamalla palaset pois reunojen c_1 ja c_2 mukaisesti ja yhdistämällä ne saadaan tulokseksi nelikulmio. Induktiolla nähdään, että yhtenäinen summa, joka muodostetaan n-kappaleesta projektiivisia tasoja on homeomorfinen $2n$-kulmion tekijäavaruuden kanssa. Kahden pallon S^2 yhtenäiselle summalle on voimassa samanlainen samastus kuin projektiivisille tasoille. Nyt vain samastus pallojen muodostamiseksi tehdään eri tavalla kuin mitä projektiivisessa tasossa, eli kuvaajissa nuolet osoittavat eri suuntiin.
Seuraavassa kuvassa nähdään kolmen projektiivisen tason yhtenäisen summan konstruktio.



Seuraavaksi esitellään keino yhtenäisen summan esittämiseksi. Tämä tehdään tarkastelemalla monikulmiota, jonka tekijäavaruuden kanssa kyseinen yhdistetty summa on homeomorfinen. Aloitetaan jostain monikulmion kärjestä ja kierretään monikulmion sivuja joko vasta- tai myötäpäivään. Mikäli sivulla oleva nuoli on samaan suuntaan kuin kiertosuunta niin merkitään sivun nimi ilman eksponenttia (tai eksponenttina $+1$). Vastaavasti mikäli sivulla oleva nuoli on vastaan kiertosuuntaa niin sivun nimen eksponenttina on -1.
Kolmen toruksen yhdistetyn summan kanssa homeomorfinen joukko, joka muodostetaan tekijäavaruutena 12-kulmiosta samastamalla sen kylkiä, esitetään seuraavasti:
$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}a_3b_3a_3^{-1}b_3^{-1}$.
Kolmen projektiivisen tason yhtenäisen summan kanssa homeomorfinen joukko, joka muodostetaan tekijäavaruutena 6-kulmiosta samastamalla sen kylkiä, esitetään seuraavasti: $a_1a_1a_2a_2a_3a_3$.
Edellisissä esimerkeissä kierrettiin vastapäivään ja aloituskulmana oli alimpana oleva kulma.
Osoitettavassa lauseessa käsitellään kolmea erilaista pintaa, joiden kanonisen muodon esitykset on seuraavat.

1. Pallo: aa^{-1}
2. n kappaletta toruksia: $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}...a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}$
3. n kappaletta projektiivisia tasoja: $a_1a_1a_2a_2...a_na_n$

Tämän luvun kuvat kirjasta [3].

6 Kompaktien pintojen kolmiointi

6.1 Määritelmä

Kompaktin pinnan S *kolmiointi* sisältää äärellisen kokoelman suljettuja osajoukkoja $\{T_1, T_2, ..., T_n\}$ sekä kokoelman homeomorfismeja $\phi_i : T_i' \to T_i$, jossa $i = 1, ..., n$. Tässä T_i' on reaalitason $\mathbb{R}^2$ kolmio eli kompakti osajoukko, jonka reunan muodostaa kolme suoraa. Joukkoja T_i kutsutaan myös kolmioiksi, sillä ne ovat homeomorfisia tasossa olevan kolmion kanssa. Vastaavasti kolmion T_i' kylkien ja kärkien kuvaa joukossa T_i kutsutaan kyljiksi ja kärjiksi.
Kompakti pinta S peitetään kolmioilla T_i siten, että

1. Jokainen kylki on kylkenä täsmälleen kahdelle kolmiolle.

2. Olkoon v kolmion kärki. Tällöin kaikki kolmiot, joilla v on kärkenä, voidaan esittää syklinä $T_0, T_1, T_2, ..., T_{n-1}, T_n = T_0$ siten, että kolmioilla T_i ja T_{i+1} on yhteinen kylki.

Kohta 1. on seurausta siitä, että kaikilla kylkien pisteillä on ympäristö V, joka on homeomorfinen avoimen yksikkökiekon U^2 kanssa. Mikäli kylki olisi kylkenä vain yhdelle kolmiolle tai yli kahdelle kolmiolle tämä ei olisi mahdollista. Tulos on helppo mieltää, mutta sen tarkka todistus on pitkä ja vaikea.
Kohdassa 2. kärki v "kierretään" kolmioilla niin, että jokainen kolmio on kiinni kyljestään viereisissä kolmioissansa. Näin kärjelle v saadaan ympäristö, joka on homeomorfinen yksikkökiekon $\overline{B^2}$ kanssa. Tarkka todistus ohitetaan, mutta intuitiivisesti asia on selvä.
Myös seuraavanlaisia rajoituksia kolmioiden yhdistämiselle asetataan.

1. Mikäli kolmioilla T_i ja T_j on yhteinen kylki, niin tämä yhteinen kylki on sama koko kyljen pituudelta molemmilla kolmioilla.

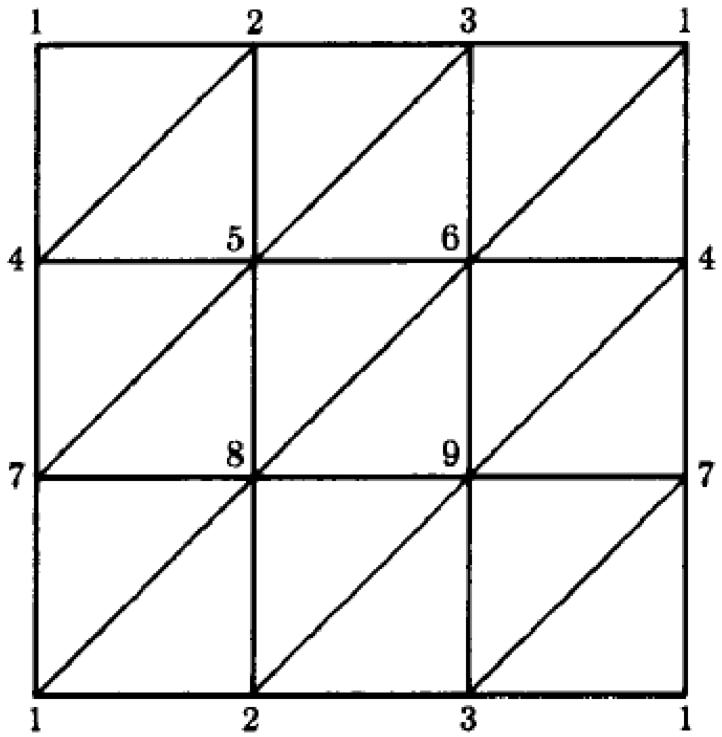
2. Kolmioiden T_i ja T_j sisäpisteiden muodostamat joukot $int(T_i)$ ja $int(T_j)$ tulee olla erilliset eli $int(T_i) \cap int(T_j) = \phi$.

3. Mikäli kolmioilla on kaksi yhteistä kärkeä, niin silloin kärkien välinen kylki on myös yhteinen.

Jokainen kompakti pinta S voidaan kolmioida eli peittää äärellisellä määrällä kolmioita edellämainitulla tavalla. (Tämän tuloksen todisti ensimmäisen kerran matemaatikko Tibor Radó vuonna 1925.) Todistus tälle lauseelle on pitkä ja se edellyttää *Jordanin käyrälauseen* sekä sen vahvempaa ja yleisempää muotoa eli *Jordanin-Brouwerin erottelulauseen* käyttöä. Todistus esitetään kirjassa [4] lauseena E.3 sivulla 163.

6.2 Esimerkkejä

Esimerkki 1. Tetraedrin eli nelitahokkaan pinta $\mathbb{R}^3$:ssa on homeomorfinen pallon S^2 kanssa. Tetraedrin tahkot täyttävät joukon S^2 kolmioinnin kriteerit.
Esimerkki 2. Toruksen kolmiointi. Ohessa on periaatekuva toruksen kolmioinnista. Lähtöjoukkona on $\mathbb{R}^2$:n neliö $[0, 1] \times [0, 1]$, josta tehdään torus aikaisemmin mainitulla tavalla.

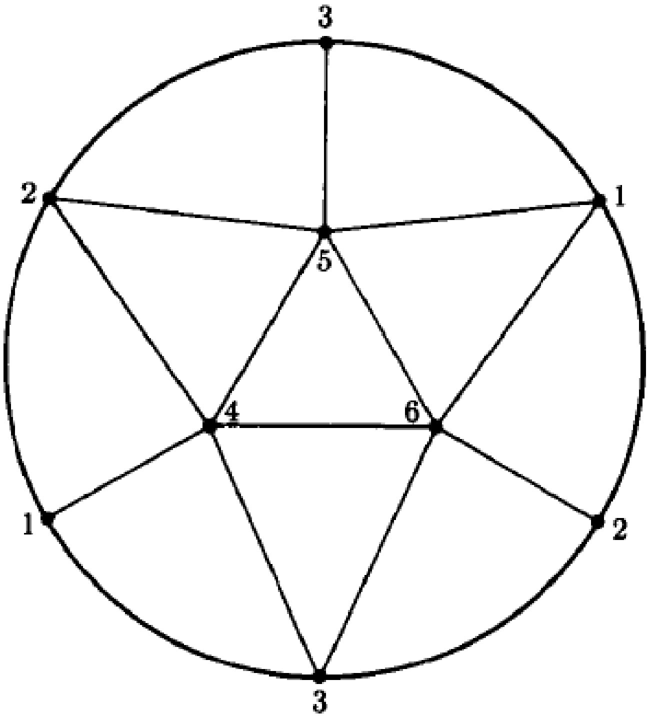


Kun pisteet $(x, 0)$ ja $(x, 1)$ samastetaan $(0 \leq x \leq 1)$, samalla pystysuoralla olevat kärjet 1 koskettavat toisiaan, kärjet 2 koskettavat toisiaan sekä kärjet 3 koskettavat toisian.
Kun pisteet $(0, y)$ ja $(1, y)$ samastetaan $(0 \leq y \leq 1)$, samalla vaakasuoralla olevat kärjet 1 koskettavat toisiaan, kärjet 4 koskettavat toisiaan sekä kärjet 7 koskettavat toisian.
Syntyneen toruksen pinnalle muodostuneet kolmiot ovat homeomorfiset tason kolmioiden kanssa.

Näin muodostuu 18 kolmiota:

124	245	235
356	361	146
457	578	658
689	649	479
187	128	289
239	379	137

Esimerkki 3. Projektiivisen tason kolmiointi. Projektiivinen taso muodostetaan samastamalla vastakkaiset pisteet x ja $-x$ kiekon reunalla.



Kehällä olevat pisteet 1 samastetaan keskenään. Samoin myös 2 ja 3. Nyt muodostuu seuraavat

	124	341
	235	245
10 kolmiota:	315	156
	162	346
	263	456

Tämän luvun kuvat kirjasta [3].

7 Kompaktien pintojen luokittelulause

Oletus: Olkoon S kompakti pinta.
Väite: Pinta S on homeomorfinen joko pallon, torusten yhtenäisen summan, tai projektiivisten tasojen yhtenäisen summan kanssa.

7.1 Juoni

Näytetään, että kompakti pinta S on homeomorfinen sellaisen tekijäavaruuden kanssa, joka muodostetaan niistä monikulmioista, joiden kanoniset muodot esitettiin aikaisemmin. Todistus on jaettu osiin, jossa ensimmäisessä käsitellään kompaktien pintojen kolmiointia tarkemmin kuin sen määritelmän yhteydessä. Seuraavissa vaiheissa kompakteja pintoja jaotellaan ja muokataan. Lopuksi vielä todistetaan, että toruksen ja projektiivisen tason yhtenäinen summa on homeomorfinen kolmen projektiivisen tason yhtenäisen summan kanssa.

7.2 Vaihe 1

Koska S on kompakti pinta, voidaan kompaktien pintojen kolmioinnin yhteydessä mainitun, kirjassa [4] olevan, todistuksen nojalla olettaa, että S on kolmioitu. Olkoon n kolmioiden lukumäärä ja olkoon $T_1, T_2, ..., T_n$ pinnan S kolmiot numeroituna siten, että kolmiolla T_i on yhteinen kylki e_i ainakin yhden kolmion $T_1, ..., T_{i-1}$, missä $2 \leq i \leq n$, kanssa. Näytetään, että tällainen kolmioiden numerointi voidaan tehdä.
Annetaan mille tahansa kolmiolle nimeksi T_1. Valitaan kolmioksi T_2 sellainen kolmio, jolla on yhteinen kylki kolmion T_1 kanssa. Kolmioksi T_3 valitaan sellainen, jolla on yhteinen kylki kolmion T_2 kanssa ja niin edelleen. Mikäli jossain vaiheessa emme voisi jatkaa tätä numerointia niin silloin saisimme kaksi kokoelmaa kolmioita $\{T_1, ..., T_k\}$ ja $\{T_{k+1}, ..., T_n\}$ niin, että ensimmäisessä kokoelmassa ei olisi kolmiota, jolla olisi yhteinen kulma tai sivu jonkin toisessa kokoelmassa olevan kolmion kanssa. Tämä antaisi joukolle S osituksen kahdeksi epätyhjäksi suljetuksi joukoksi, joka on ristiriita joukon S yhtenäisyyden kanssa.
Nyt käytetään kolmioiden järjestämistä, $T_1, T_2, ...T_n$, sekä kylkien valitsemista, $e_2, e_3, ..., e_n$, jotta pinnasta S saadaan "malli" euklidisille tasolle $\mathbb{R}^2$. Tämä malli on tason monikulmio, jonka sivuja samastetaan pareittain. Samastuksen tuloksena saadaan pinta S.
Muistutetaan, että jokaisella kolmiolla T_i on tavallinen kolmio T_i' euklidisessa tasossa $\mathbb{R}^2$ sekä homeomorfismi $\phi_i : T_i' \to T_i$. Voidaan olettaa, että kolmiot $T_1', T_2', ..., T_n'$ ovat pareittain erilliset. Tällä tarkoitetaan sitä, että jos valitaan kolmiot T_i' ja T_k' niin $T_i' \cap T_k' = \phi$ aina kun $i \neq k$. Jos kyseiset kolmiot eivät olisi erillisiä, ne olisi mahdollista siirtää toiseen paikkaan tasossa.
Olkoon $T' = \cup_{i=1}^{n} T_i'$. Nyt T' on kompaktien joukkojen äärellisenä yhdisteenä kompakti avaruuden $\mathbb{R}^2$ osajoukko. Määritellään $\phi : T' \to S$ siten, että $\phi \mid T_i' = \phi_i$. Kuvaus ϕ on selvästi jatkuva. Koska T' on kompakti ja S on Hausdorff, on kuvaus ϕ Määritelmiä ja käsitteitä -luvun Jatkuva, avoin ja suljettu kuvaus -kohdassa mainitun tuloksen mukaan suljettu.
Kirjan [2] sivulla 63 lauseessa 8.9 mainitaan seuraava tulos. Olkoon $f : X \to Y$ jatkuva surjektio. Jos f on avoin tai suljettu kuvaus, niin f on samaistuskuvaus. Kyseisen lauseen todistus on tässä työssä kohdassa Tekijätopologia ja tekijäavaruus.
Kuvaus ϕ on suljettu ja jatkuva kuten aiemmin huomattiin. Lisäksi se on surjektiivinen. Näin kuvaus ϕ on samaistuskuvaus. Samaistuskuvaus koindusoi maalijoukkoon sen alkuperäisen topologian, kuten samaistuskuvauksen määritelmässä mainitaan. Näin joukossa S on topologia, joka on kuvauksen ϕ koindusoima tekijätopologia.
Tämä on tarkka matemaattinen kuvaus sille intuitiolle, että S saadaan liimaamalla kolmioita $T_1, T_2, ...$ sivuistansa yhteen.
Monikulmio, jonka konstruoimme, tulee olemaan avaruuden T' tekijäavaruus. Tarkastellaan mitä tahansa kylkeä e_i, jossa $2 \leq i \leq n$. Aikaisemmin mainitsimme, että e_i on kylki kolmiolle T_i sekä myös toiselle kolmiolle T_j, missä $1 \leq j < i$. Näin ollen joukko $\phi^{-1}(e_i)$ sisältää kolmioiden T_i'

ja T'_j reunojen alkioita. Tällä tavoin samastetaan kolmioiden T'_i ja T'_j ne kyljet, joiden alkukuva kuvauksessa ϕ on sama. Eli kolmiot T'_i ja T'_j "liimataan" toisiinsa kyljistä e_i. Tämänkaltainen samastus tehdään kaikille kyljille $e_2, e_3, ..., e_n$.
Olkoon D kolmioista T'_i muodostettu yksinkertaistettu monikulmio (Jollainen nähdään mm. sivun 17 alemmassa kuvassa.). Kuvauksesta $\phi : T' \to S$ saadaan kuvauksen kanonisena hajotelmana kuvaus $\psi : D \to S$. Kuvauksen kanonisen hajotelman yhteydessä käytettävien merkintöjen mukaan joukkona X on tason kolmiot T'_i, joukkona Y kompakti pinta S ja joukkona X/R_f säännöllinen monikulmio D. Lisäksi, käytettyjen merkintöjen mukaan, kuvauksena f on kuvaus ϕ, kuvauksena f' kuvaus ψ ja kuvauksena p kuvaus, joka yhdistää tason kolmiot säännölliseksi monikulmioksi.
Koska D on kompakti ja S on Hausdorff, on kuvaus ψ johdantoluvun Jatkuva ja suljettu kuvaus -kohdassa mainitun tuloksen mukaan suljettu. Näin joukossa S on kuvauksen ψ koindusoima tekijätopologia. [3] liite A sivut 244-245.
Seuraavaksi todistetaan, että avaruus D on topologisesti sama kuin suljettu kiekko $\overline{B^2}$. Todistuksessa käytetään seuraavia tuloksia:

1. Olkoon E_1 ja E_2 erillisiä avaruuksia, jotka ovat homeomorfisia suljetun kiekon $\overline{B^2}$ kanssa. Olkoon A_1 joukon E_1 reunan sellainen osajoukko, joka on homeomorfinen yksikkövälin I kanssa. Olkoon A_2 joukon E_2 reunan sellainen osajoukko, joka on homeomorfinen yksikkövälin I kanssa. Olkoon kuvaus $h : A_1 \to A_2$ homeomorfismi. Nyt muodostetaan tekijäavaruus $E_1 \cup E_2$ samastamalla pisteitä kuvauksen h mukaan. Nyt saatu tekijäavaruus on homeomorfinen yksikkökiekon $\overline{B^2}$ kanssa. [3]

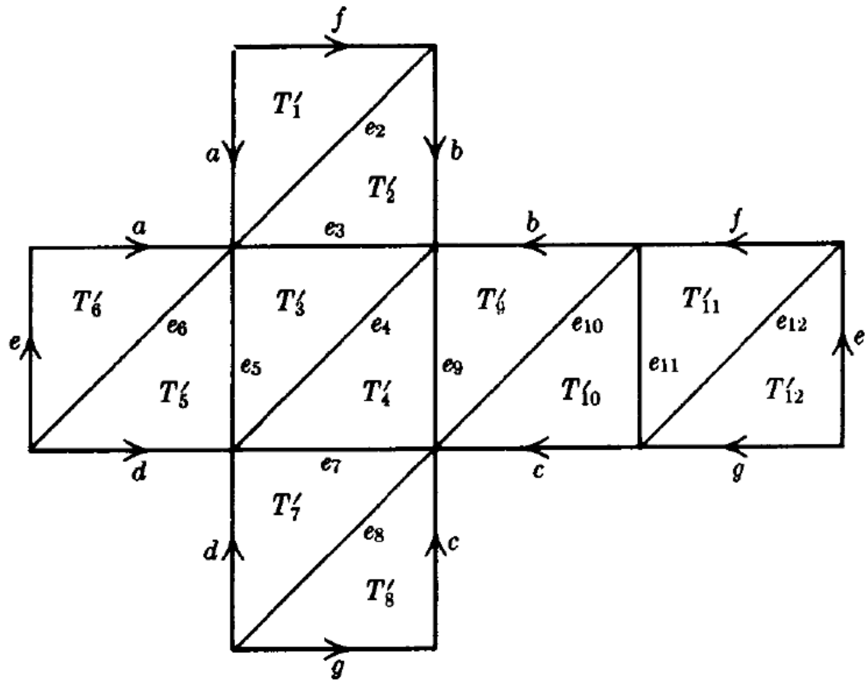
2. Muodostaaksemme avaruuden T' tekijäavaruuden D kaikki samastukset voidaan tehdä kerralla tai tehdä samastukset vaiheittain. Ensin samastamalla se kylki, joka samastetaan kyljen e_2 kanssa ja sitten samastamalla kylki, joka samastetaan kyljen e_3 kanssa jne. Todistus tähän löytyy kirjasta [3] liitteen A Lemman 2.4 a-sovelluksesta.

Käytämme näitä tuloksia todistaaksemme, että D on topologisesti sama kuin $\overline{B^2}$. Olkoon T'_1 ja T'_2 topologisesti samoja kuin $\overline{B^2}$. Nyt tekijäavaruus $T'_1 \cup T'_2$, joka saadaan samastamalla joukon $\phi^{-1}(e_2)$ alkiot, eli joukoille T'_1 ja T'_2 yhteisen kyljen e_2 alkukuvan alkiot. Tämä on topologisesti sama kuin $\overline{B^2}$. (1. kohta) Muodostamalla tekijäavaruus saadun suljetun yksikkökiekon sekä avaruuden T'_3 kanssa ($\overline{B^2} \cup T'_3$) samastamalla kyljen e_3 pisteitä, eli joukoille $T'_1 \cup T'_2$ ja T'_3 yhteisen kyljen e_3 alkukuvan alkiot. Näin saadaan taas topologisesti suljettu yksikkökiekko.

Näin kompakti pinta S tullaan saamaan joukosta D, joka oli kolmioista tehty yksinkertainen säännöllinen monikulmio, samastamalla D:n reunan kylkiä.

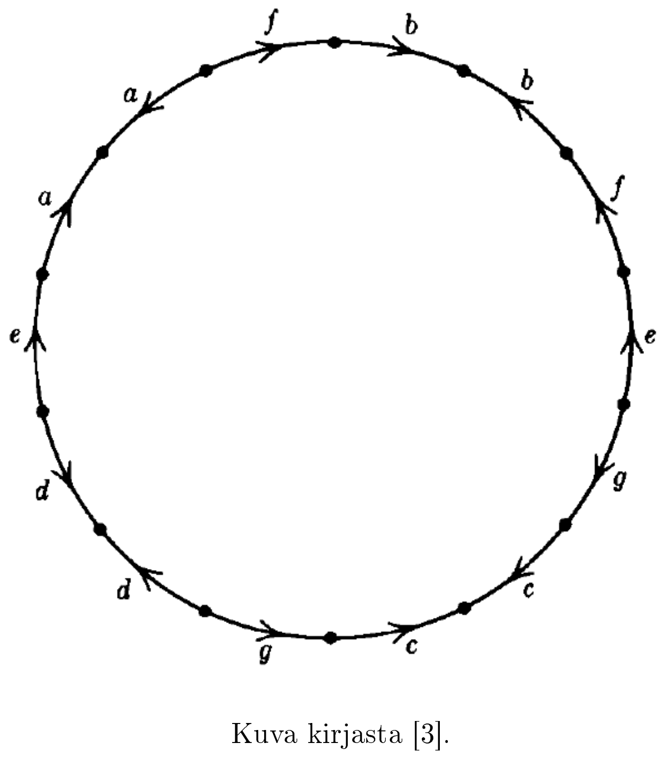
7.3 Esimerkkejä

Esimerkki 1. Oheinen kuva näyttää miten kuutio on kolmioitu jakamalla jokainen tahko kahdeksi kolmioksi. Samalla kuutiosta on tehty malli tasoon $\mathbb{R}^2$. Kolmiot ja niiden kyljet ovat nimetty ja nuolilla näytetään mitkä pisteet samastetaan keskenään. Tästä tason monikulmiosta saadaan kuutio sen tekijäavaruutena.



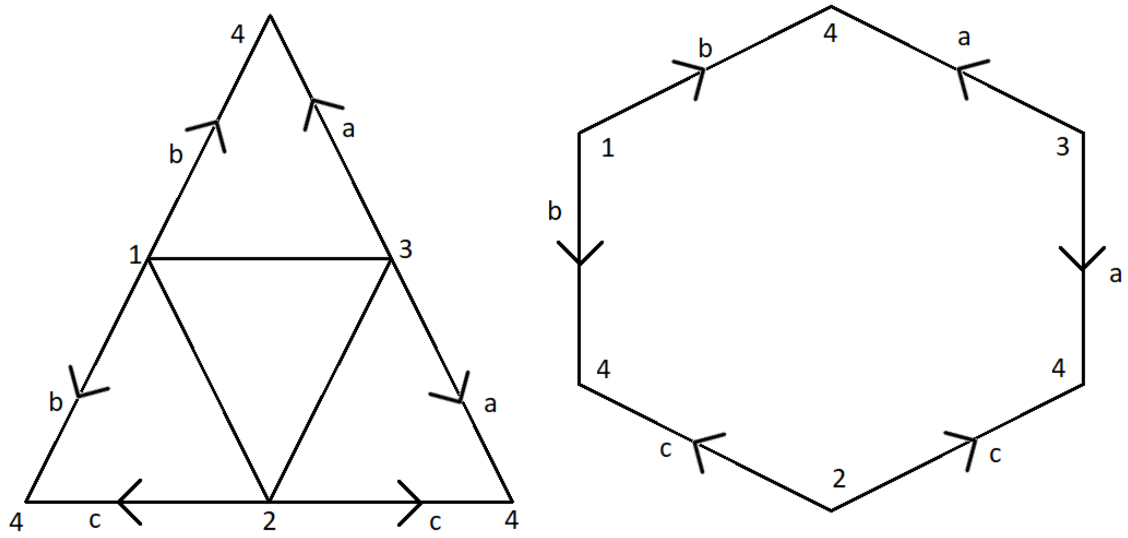
Kuva kirjasta [3].

Seuraava kuva näyttää miten ylläolevasta kuution mallin reunasta on tehty säännöllinen monikulmio. Näin saadaan yksinkertainen malli.



Kuva kirjasta [3].

Tämän säännöllisen monikulmion kanoninen muoto on $bb^{-1}f^{-1}e^{-1}gcc^{-1}g^{-1}dd^{-1}eaa^{-1}f$.
Esimerkki 2. Olkoon jonkin kompaktin pinnan kolmiointi 123, 234, 341, 412. Käydään läpi edellä mainittu prosessi. Kyseisen pinnan kolmiointi vastaa tetraedria eli nelitahokasta.

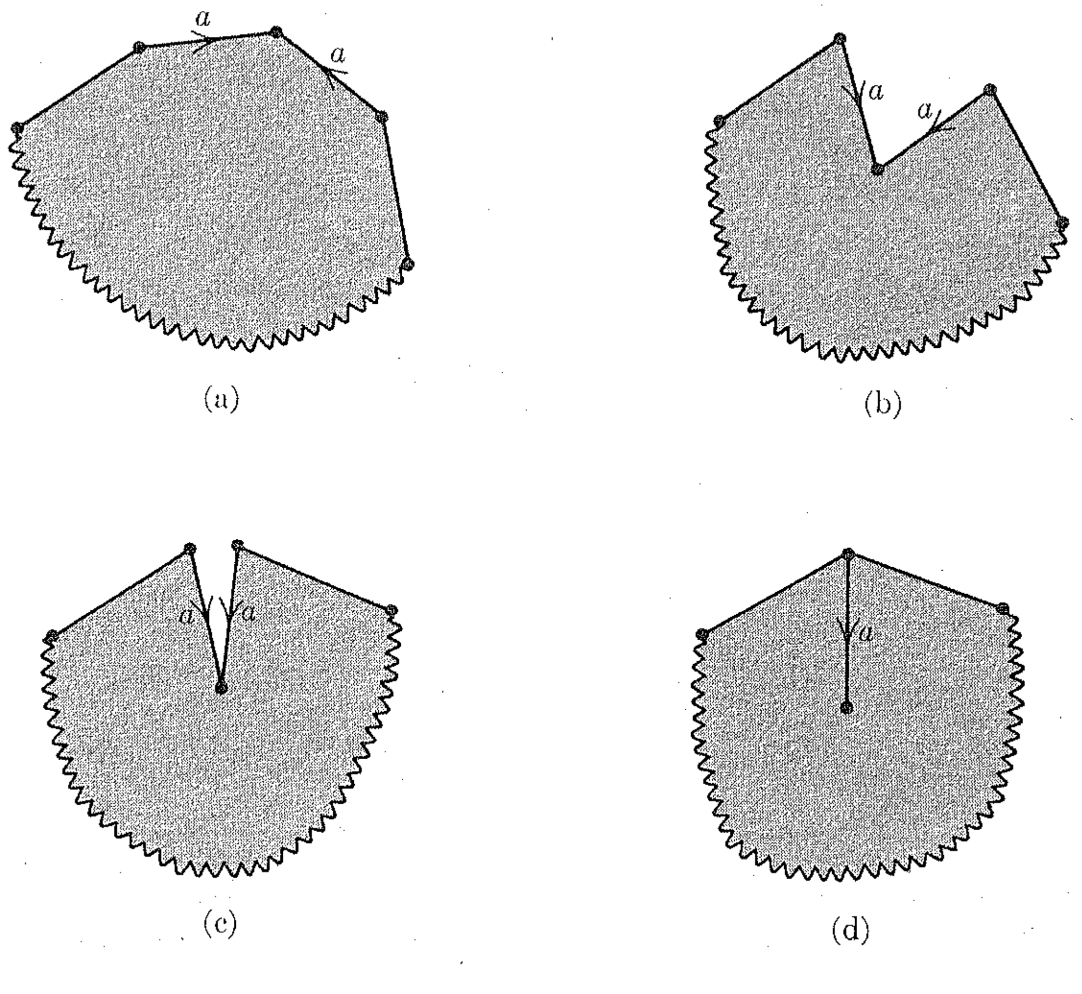


Kuva tekijän oma

Tetraedrin kolmiointi tasolla ja sen reunaa vastaava säännöllinen monikulmiointi. Monikulmion kanoninen muoto on $a^{-1}ac^{-1}cb^{-1}b$.

7.4 Vaihe 2

Todistuksen seuraavassa vaiheessa tarkastellaan viereisten sivujen eliminointia. Tutkittaessa pinnan S kanonista muotoa olemme muodostaneet sitä vastaavan säännöllisen monikulmion D. Pinta S saadaan samastamalla monikulmion D kylkiä annetulla tavalla. Todistuksen ensimmäisen vaiheen esimerkissä 1. tutkittiin kuutiota, jonka samastus tehtiin seuraavalla tavalla: $bb^{-1}f^{-1}e^{-1}gcc^{-1}g^{-1}dd^{-1}eaa^{-1}f$.
Mikäli kirjanyhdistelmä, joka kuvaa tietyn kylkiparin samastusta sisältää sekä eksponentit $+1$ ja -1 kutsutaan paria ensimmäisen tyypin pariksi. Mikäli näin ei ole, paria kutsutaan toisen tyypin pariksi. Kylkiparin ei tarvitse sijaita kanonisessa muodossa peräkkäin. Esimerkin 1. kuution samaistuksessa kaikki seitsemän paria ovat ensimmäistä tyyppiä.
Pari viereisiä kylkiä voidaan eliminoida mikäli ne ovat ensimmäistä tyyppiä. Eliminoinnin jälkeen kyseessä ei ole sama pinta, mutta ne ovat homeomorfiset. Kylkiparien eliminoimista voidaan jatkaa kunnes jäljellä on vain yksi kylkipari, joka voi olla ensimmäistä tai toista tyyppiä.
Mikäli kylkipari on tyyppiä yksi eli aa^{-1} pinta on homeomorfinen pallon kanssa, sillä sen kanoninen muoto on sama kuin pallon kanoninen muoto. Mikäli kylkipari on toista tyyppiä eli aa tutkittu pinta on projektiivisen tason kanssa homeomorfinen.



Kuva kirjasta [3].

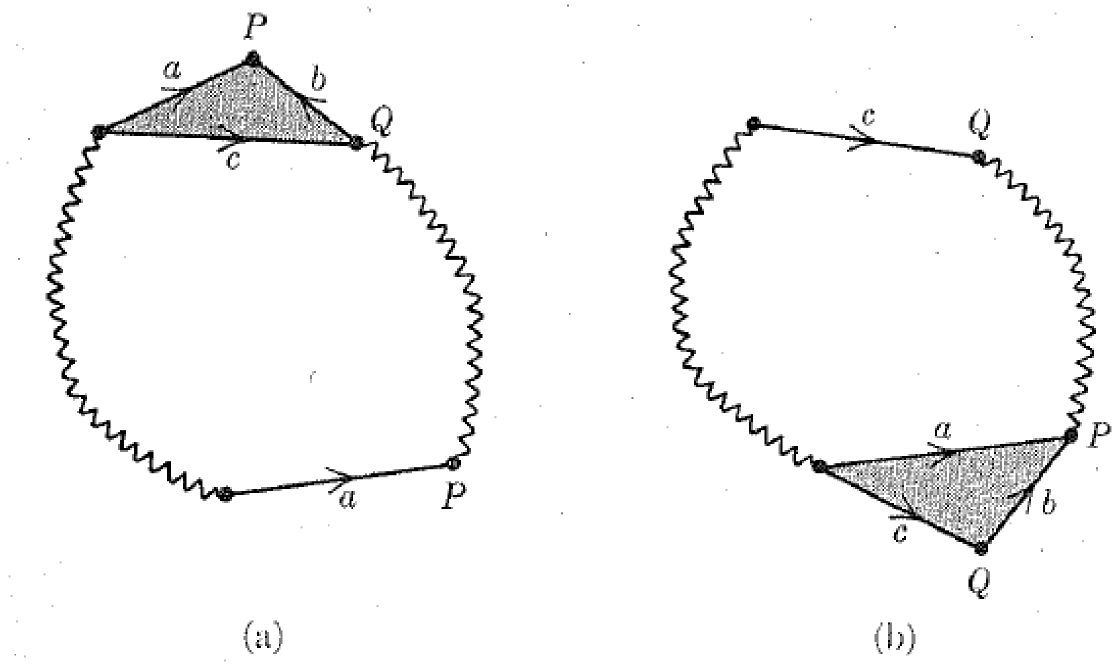
Ylläoleva kuvasarja näyttää miten ensimmäisen tyypin kylkipari voidaan eliminoida. Tarkoituksena on muokata monikulmiota niin, että kylkien a lähtöpiste ja päätepiste ovat samat. Tästä muunnoksesta saatu uusi monikulmio on homeomorfinen alkuperäisen monikulmion kanssa.

7.5 Esimerkkejä

Esimerkki 1. Kuution I^3 reunan kolmioinnin kanoninen muoto on $bb^{-1}f^{-1}e^{-1}gcc^{-1}g^{-1}dd^{-1}eaa^{-1}f$. Käydään läpi vierekkäisten sivujen eliminointi. $bb^{-1}f^{-1}e^{-1}gcc^{-1}g^{-1}dd^{-1}eaa^{-1}f \approx f^{-1}e^{-1}gg^{-1}ef$. Ensimmäisessä vaiheessa poistetaan ne parit, jotka ovat peräkkäin. Ensimmäisen eliminoinnin jälkeen voidaan poistaa ensimmäisen tyypin kylkipareja lisää: $f^{-1}e^{-1}gg^{-1}ef \approx f^{-1}e^{-1}ef \approx f^{-1}f$. Nyt jäljellä on yksi kylkipari, joka on ensimmäistä tyyppiä. Kuution I^3 reuna on siis homeomorfinen pallon kanssa.
Esimerkki 2. Tetraedrin kanoninen muoto on $a^{-1}ac^{-1}cb^{-1}b$. Huomaamme, että kaikki kylkiparit ovat ensimmäistä tyyppiä ja ne ovat peräkkäin. Parien $c^{-1}c$ ja $b^{-1}b$ poistamisen jälkeen jäljelle jää pari $a^{-1}a$ eli tetraedri on siis homeomorfinen pallon kanssa.

7.6 Vaihe 3

Todistuksen kolmennessa vaiheessa käsitellään monikulmion kärkien samastamista. Vaikka monikulmion kylkiä samastetaan kaksi kerrallaan, niin kärkien samastus voidaan tehdä useampi kerrallaan tai kärkeä ei samasteta toisen kärjen kanssa ollenkaan. Sanotaan, että monikulmion kärjet ovat *ekvivalentit* jos ja vain jos ne samastetaan.
Tarkastelemalla todistuksen ensimmäisen vaiheen ensimmäisen esimerkin kuution kolmiointia sekä siitä yksinkertaistettua säännöllistä monikulmiota huomaamme, että kulmien samastuksessa on kahdeksan erilaista ekvivalenssiluokkaa. Esimerkiksi seuraavat monikulmion kärjet samastetaan. (Kärjet nimetään niiden kylkien mukaan.)
Kärjet (e, d), (d, g), (g, e). Tähän ekvivalenssiluokkaan kuuluu kolme kärkeä.
Kärki (d, d). Tähän ekvivalenssiluokkaan kuuluu vain yksi kärki.
Oletetaan, että vaihetta 2 on käyty läpi niin paljon kuin mahdollista, eli yhtenäisen summan kanonisesta muodosta on poistettu peräkkäiset samannimiset kyljet, joiden eksponentit ovat erisuuret. Tarkoituksena on näyttää, että tutkittava monikulmio voidaan muuntaa sellaiseksi monikulmioksi, että kaikki sen kärjet kuuluvat samaan ekvivalenssiluokkaan.
Oletetaan, että monikulmion kärjet muodostavat ainakin kaksi ekvivalenssiluokkaa. Tällöin monikulmiossa täytyy olla vierekkäinen pari kärkiä, jotka eivät ole ekvivalentit. Olkoon näiden kärkien nimet P ja Q. Koska kärjet eivät ole ekvivalentit ja todistuksen vaihe kaksi on käyty läpi, kylkiä a ja b ei samasteta. Tässä kylki b on kärkien P ja Q välissä. Olkoon c suora, joka kulkee kärjeltä Q siihen kärkeen, joka on kyljen a samastussuunnan lähtöpiste. Tehdään leikkaus viivaa c pitkin. Tämän jälkeen leikataan monikulmiosta pala pois viivaa c pitkin.

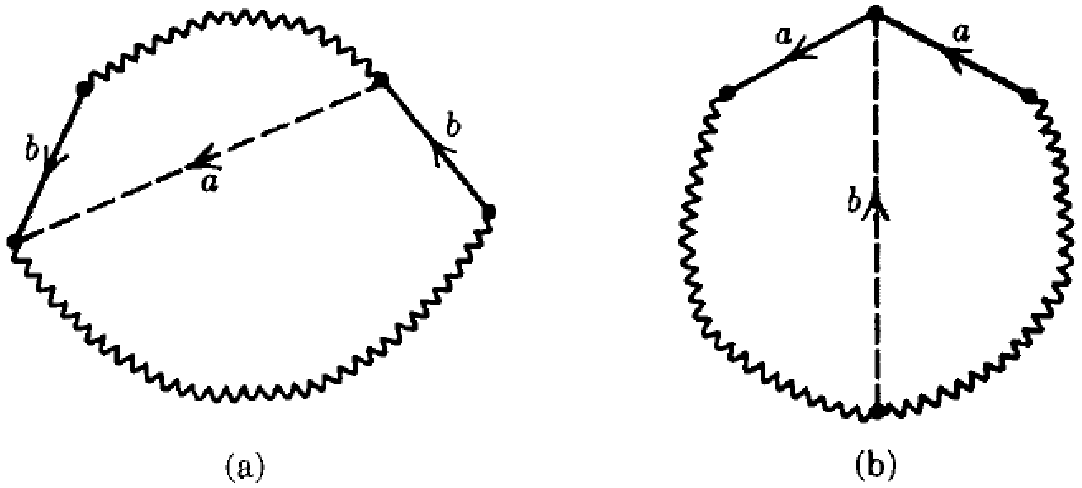


Kuva kirjasta [3].

Seuraavaksi suoraa c pitkin leikattu osa pois liitetään uudelleen jäljellejääneeseen osaan. Liitos tehdään niin, että kyljet a ovat vierekkäin ja samastussuunta on sama. Oheisessa kuvassa tämä näkyy niin, että kylkien a nuolet osoittavat samaan suuntaan. Uudessa monikulmiossa on vähemmän kärkiä ekvivalenssiluokassa P ja yksi kärki lisää ekvivalenssiluokassa Q. Mikäli mahdollista todistuksen toinen vaihe voidaan käydä uudelleen läpi.
Oheisessa kuvan b-kohdassa tämä uudelleen läpikäynti näkyisi seuraavasti (käsitellään monikulmion kanonisen muodon osaa): $aa^{-1}cb \approx cb$.
Seuraavaksi monikulmiota muokataan käymällä läpi vaihetta 3 ja vaihetta 2 vuorotellen kunnes ekvivalenssiluokka P on eliminoitu kokonaan. Mikäli enemmän kuin yksi ekvivalenssiluokka on jäljellä, jatketaan prosessia kunnes vain yksi ekvivalenssiluokka on jäljellä. Lopulta päästään tilanteeseen, jossa kaikki monikulmion kärjet samastetaan yhdelle kärjelle.

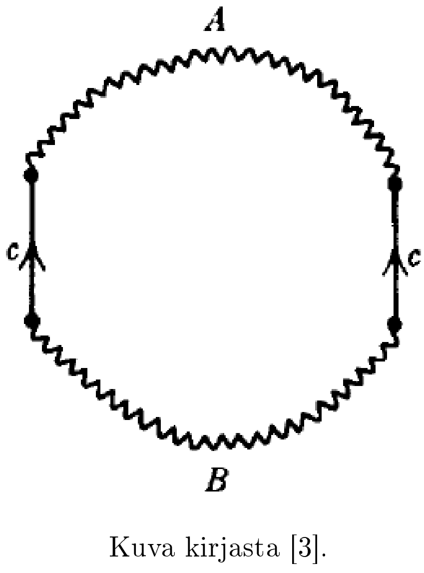
7.7 Vaihe 4

Neljännessä vaiheessa käydään läpi keino, jolla minkä tahansa toista tyyppiä oleva kylkipari voidaan muuttaa viereiseksi pariksi.
Oletetaan, että käsiteltävässä monikulmiossa on toista tyyppiä oleva pari b, jotka eivät ole viereisiä toisilleen.



Kuva kirjasta [3].

Piirretään viiva a toisen b-kyljen samastussuunnan lopusta toisen b-kyljen samastussuunnan alkuun. Nyt leikataan viivaa a pitkin monikulmio kahdeksi osaksi ja liitetään ne toisiinsa niin, että kylkien b samastuksen alkupisteet ovat samat ja samastuksen loppupisteet ovat samat. Samalla kylki b voidaan eliminoida.
Tätä prosessia jatketaan kunnes jokainen toista tyyppiä oleva kylkipari ovat viereiset. Mikäli ensimmäistä tyyppiä olevia kylkipareja ei ole, prosessi on käyty loppuun ja monikulmio on muotoa $a_1a_1a_2a_2...a_na_n$. Tällöin S on homeomorfinen sellaisen pinnan kanssa, joka on muodostettu n-kappaleen projektiivisen tason yhtenäisenä summana.
Oletetaan, että monikulmiossa on ainakin yksi kylkipari, joka on ensimmäistä tyyppiä ja kyljet eivät ole peräkkäisiä. Kutsutaan tätä kylkiparia nimellä c. Oletetaan lisäksi, että on vielä toinen ensimmäistä tyyppiä oleva kylkipari, jonka kyljet eivät ole peräkkäisiä. Kutsutaan tätä kylkiparia nimellä d. Oletetaan lisäksi, että kylkiparin c jäsenet eivät ole peräkkäisiä ja kylkiparin d jäsenet eivät ole peräkkäisiä. Oletetaan myöskin, että mainittujen kylkiparien jäsenet kanonisessa muodossa vuorottelevat. Tällä tarkoitetaan, että kanoninen muoto on seuraavanlainen: $c...d...c^{-1}...d^{-1}....$ Pisteet kuvaavat muiden kylkien symbolien paikkoja.

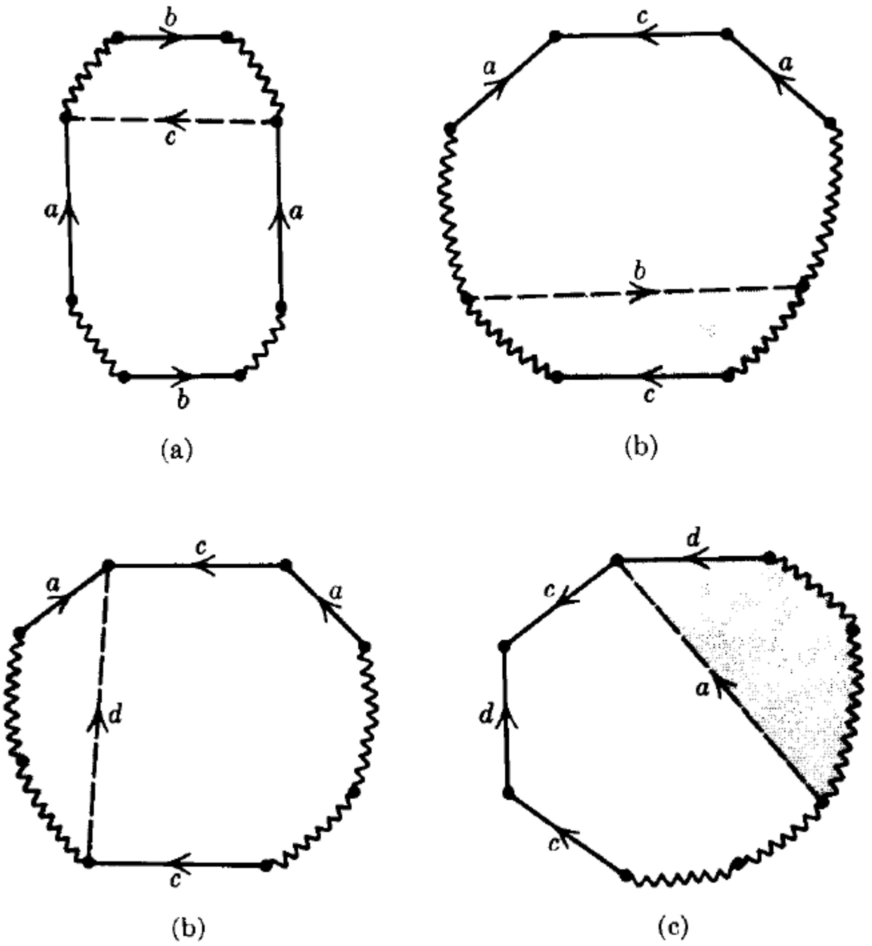


Kuva kirjasta [3].

Tämän tilanteen näyttämiseksi tehdään antiteesi. Oletamme, että c:llä merkittyjen kylkien välissä ei ole ensimmäistä tyyppiä olevaa kylkiparia. Nyt monikulmion muoto on sama kuin ylläolevassa periaatekuvassa. Symbolilla A merkitään sitä monikulmion kylkijonoa, joka yhdistää kylkiparin c samastussuunnan loppupisteet ja symbolilla B merkitään sitä monikulmion kylkijonoa, joka yhdistää kylkiparin c samastussuunnan alkupisteet. Tärkeää on, että mikä tahansa kylki A:ssa tulee samastaa sellaisen kyljen kanssa, joka kuuluu A:han. Tämä sama koskee kylkijonoa B. Kylkijonon jäsentä A:ssa ei saa samastaa kylkijonoon B kuuluvan kyljen kanssa. Tämä muodostaa ristiriidan kolmannen vaiheen kanssa, sillä kolmannen vaiheen mukaan lopulta kärjet jommallakummalla kyljellä c tullaan samastamaan. Näin antiteesi osoittautuu vääräksi.

7.8 Vaihe 5

Viidennessä vaiheessa oletetaan, että käsiteltävänä on seuraavanlainen monikulmio. Monikulmiossa on kaksi ensimmäistä tyyppiä olevaa kylkiparia a, jotka eivät ole viereisiä toisilleen, ja b, jotka eivät ole viereisiä toisilleen. Myöskään kyljet a ja b eivät ole viereisiä toisilleen. Nyt käydään läpi menetelmä, jolla monikulmio voidaan muuntaa niin, että kyseiset neljä sivua voidaan saada monikulmion kehälle peräkkäin.



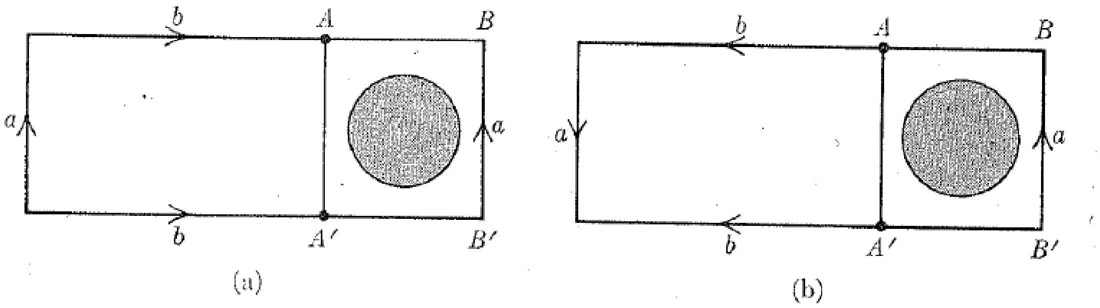
Kuva kirjasta [3].

Ensin tehdään viiva c kylkien a samastuksen loppupisteiden väliin, kuten ylläolevan kuvan a-kohta näyttää, ja leikataan sitä pitkin monikulmio kahteen osaan. Tämän jälkeen osat liitetään niin, että kyljet b ovat vastakkain niin, että b samastussuuntien alkupisteet ovat vastakkain ja loppupisteet ovat vastakkain. Tämä nähdään kuvan b-kohdassa.
Seuraavaksi piirretään viiva d kylkien c samastuksen suunnan loppupisteestä toiseen. Tämän jälkeen osat liitetään niin, että kyljet a ovat vastakkain niin, että a samastussuuntien alkupisteet ovat vastakkain ja loppupisteet ovat vastakkain. Tämä nähdään kuvan c-kohdassa.
Tätä prosessia jatketaan kunnes ensimmäistä tyyppiä olevat kylkiparit ovat neljän ryhmissä

eli $cdc^{-1}d^{-1}$. Mikäli toisen tyypin kylkipareja ei ole, on saatu yhdistetyn summan kanoninen muoto, joka on tyyppiä $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}...a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}$. Tämä pinta on yhtenäinen summa n-kappaleesta toruksesta.
Toistaiseksi on vielä käsittelemättä vaiheiden neljä ja viisi kaltainen tilanne, joka sisältää sekä ensimmäisen että toisen tyypin kylkiä. Kirjassa [3] kyseinen tapaus on nimeltä *Lemma 7.1.* Se tulee olemaan tämän todistuksen viimeinen vaihe. Myös tässä se muotoillaan omaksi tulokseekseen.

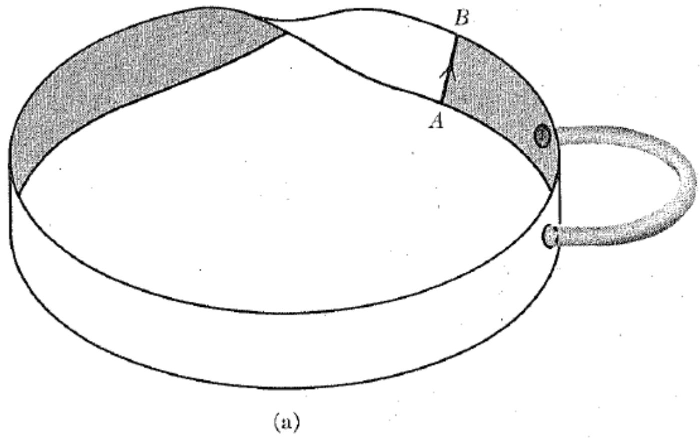
7.9 Toruksen ja projektiivisen tason yhtenäinen summa

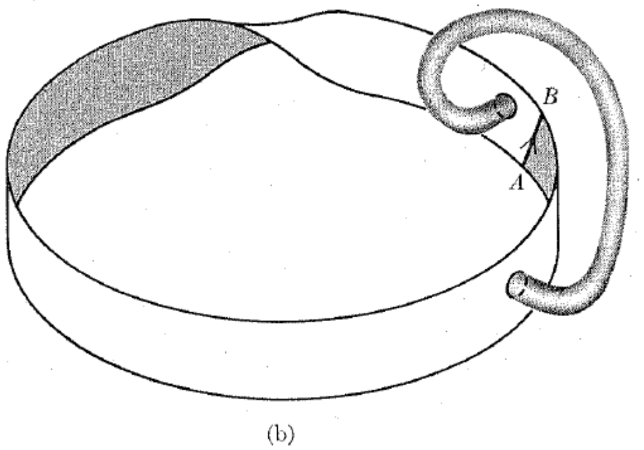
Väite: Toruksen ja projektiivisen tason yhtenäinen summa on homeomorfinen kolmen projektiivisen tason yhtenäisen summan kanssa.
Todistus: Luvun 5.2 esimerkissä 3 todistettiin, että kahden projektiivisen tason yhtenäinen summa on homeomorfinen Kleinin pullon kanssa. Nyt riittää näyttää, että projektiivisen tason ja toruksen yhtenäinen summa on homeomorfinen projektiivisen tason ja Kleinin pullon yhtenäisen summan kanssa.
Todistus on kätevä tehdä esittämällä vaihtoehtoinen konstruktio minkä tahansa pinnan S ja toruksen tai pinnan S ja Kleinin pullon yhtenäiselle summalle.



(a) Torus, jossa on reikä (b) Kleinin pullo, jossa on reikä. Kuva kirjasta [3].

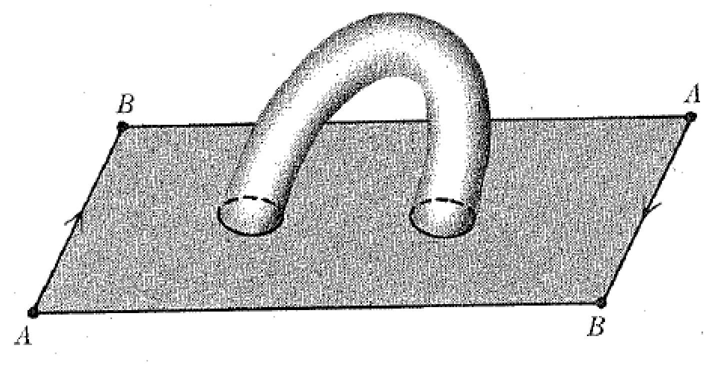
Torus ja Kleinin pullo voidaan esittää suorakaiteena, joiden vastakkaisia sivuja samastetaan kuten ylläolevasta kuvasta nähdään. Muodostaaksemme yhtenäisen summan, ensin suorakaiteista leikataan ympyränmuotoiset alueet pois. Kuvassa tämä näkyy tummempana alueena. Tämän jälkeen pinnasta S leikataan samankaltainen ympyränmuotoinen alue pois. Seuraavaksi suorakulmiosta poisleikatun ympyränmuotoisen alueen reuna liimataan pinnasta S poisleikatun ympyrän muotoisen alueen reunaan.
Kun muodostetaan Kleinin pullo tai torus, on samastuksien kanssa edettävä eri tavalla. Ensimmäisessä vaiheessa tulee samastaa kylki AB kyljen $B'A'$ kanssa nuolen b suunnan mukaisesti ja toisessa vaiheessa tehdään suorakulmiosta jäljellejääneiden kylkien samastus toruksen tai Kleinin pullon muodostamiseksi sivulla 31 olevan ylemmän kuvan mukaisesti. Pienemmän suorakaiteen $ABB'A'$ sisään jää suorakaiteesta poisleikattu alue.
Ensimmäisessa vaiheessa muodostamme yhtenäisen summan pinnan S ja ensimmäisessä samastuksessa muodostetun avoimen putken kanssa. Tälläinen avoin putki on homeomorfinen pallon kanssa, johon on porattu kaksi reikää. Muodostamalla yhtenäinen summa pinnan S ja pallon kanssa homeomorfisen pinnan kanssa ei muuta tilannetta. Eli pinta, joka saadaan ensimmäisessä vaiheessa on homeomorfinen alkuperäisen pinnan S kanssa, johon on porattu kaksi reikää.





(a) Möbiuksen nauhan ja toruksen yhtänäinen summa. (b) Möbiuksen nauhan ja Kleinin pullon yhtenäinen summa. Kuva kirjasta [3].

Toisessa vaiheessa molempien reikien reunat yhdistetään putken kanssa, joka jää jäljelle suorakaiteesta kun torus tai Kleinin pullo muodostetaan samastamalla kylki AB kyljen $B'A'$ kanssa. Ero näiden välille tulee siitä säilyykö kiertosuunta samana vai vaihtuuko se. Ylläoleva kuvassa (a) on yhdistettynä Möbiuksen nauha ja torus ja kuvassa (b) on Möbiuksen nauha ja Kleinin pullo. Pinta S on Möbiusnauha. Nyt näytämme, että nämä ovat homeomorfiset. Tilanne voidaan ajatella niin, että Möbiuksen nauha leikataan poikki janan AB suuntaisesti.



Tilanne, joka seuraa kun edellisen kuvan tilanteessa leikataan janan AB suuntaisesti. Kuva kirjasta [3].

Molemmissa tapauksissa tuloksena on suorakulmio ja siihen molemmista päistä liitetty putki, kuten ylläolevassa kuvassa nähdään, ja ne ovat keskenään homeomorfiset.
Luvun 5.2 esimerkissä 3 todistettiin, että projektiivinen taso saadaan liittämällä kiekon reuna Möbiuksen nauhan reunalle.
Koska Möbiuksen nauhan ja toruksen yhtenäinen summa on homeomorfinen Möbiuksen nauhan ja Kleinin pullon yhtenäisen summan kanssa, niin myös ne avaruudet jotka saadaan, kun kiekko liitetään molempien reunoille ovat homeomorfiset.
Näin projektiivisen tason ja toruksen yhtenäinen summa on homeomorfinen projektiivisen tason ja Kleinin pullon yhtenäisen summan kanssa. Tämä oli todistettava. □

Tämän viimeisen osan läpikäynti antoi todistuksen jäljellejääneelle osalle. Kun todistuksen viidennen osan monikulmion muokkaus on käyty läpi tilanne on seuraava. Monikulmiolla on m paria ($m > 0$) toisen tyypin kylkiä niin, että kaksi kylkeä molemmista pareista ovat viereiset. Lisäksi monukulmiossa on n kappaletta $n > 0$ neljän kyljen ryhmää, joissa on kaksi kappaletta ensimmäisen tyypin kylkiparia. Nämä ensimmäisen tyypin kylkiparit eivät ole vierekkäisiä, eli niitä ei voida suoraan eliminoida.

Nyt pinta on yhtenäinen summa m kappaleesta projektiivisesta tasosta ja n kappaleesta toruksesta. Todistuksen viimeisen vaiheen nojalla tämä on homeomorfinen $m+2n$ projektiivisen tason yhtenäisen summan kanssa. □

Kompaktien pintojen luokittelulauseen todistus päättyi tähän.

8 Viitteet

Viitteet

[1] Jussi Väisälä, Topologia I, Limes, 2004

[2] Jussi Väisälä, Topologia II, Limes, 2005

[3] W.S. Massey, A Basic Course in Algebraic Topology, Harcourt, Brace and World, Inc., 1967

[4] Jean Gallier, Dianna Xu, A Guide to the Classification Theorem for Compact Surfaces, Springer Heidelberg New York Dordrecht London, 2013

[5] Wikimedia Commons, $https://commons.wikimedia.org/wiki/Main_Page$, 21.11.2017